BIBLIOTECA DI ARTIGLIERIA


FONDO PIZZOFALCONE

ANALISI

APPLICATA

ALLA GEOMETRIA DI TRE DIMENSIONI

OPERA DI C.-F.-A.-LEROY

PROFESSORE NELLA SCUOLA POLITECNICA, EC. EC.

VERSIONE DAL FRANCESE,

eseguita sulla seconda edizione di Parigi.

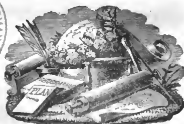


PARTE I. ELEMENTARE

CHE ABBRACCIA LA TEORICA DELLA RETTA, DEL PIANO, E DELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO,

con note, e cambiamenti intesi a renderla indipendente dalla Trigonometria Sferica e dal Calcolo Differenziale.







NAPOLI

Real Tipografia Militare,

1843.



AVVERTIMENTO DEL TRADUTTORE.

Essendosi sostituita con superiore approvazione, e con plauso di tutti quelli che amano il progresso delle scienze, la Geometria Descrittiva del Leroy a quella del Monge nella Scuola di Applicazione di Ponti e Strade, ci è anche sembrato convenevole sostituire nello studio particolare, che dirigiamo insieme col signor professore de Angelis, l' Analisi applicata alla Geometria di tre dimensioni dello stesso Leroy, all'Appendice sulle superficie curve e sulle curve di doppia curvatura del Lacroix.

Noi tenghiamo giustificata quest' altra sostituzione da due riflessi: il primo, che la citata Appendice comprende appena le nozioni primordiali della Geometria analitica a tre dimensioni; il secondo, che per la intima relazione che vi à tra questa e la Geometria Descrittiva, non può ammeno di tornare utilissimo il servirsi per ambedue del medesimo autore.

Se non che, essendo l' opera del Leroy troppo estesa per potersi tutta dettare nel tempo da noi fissato per l' insegnamento dell' intero corso delle matematiche, abbiamo creduto poterla dividere in due parti, una *elementare* l' altra *superiore;* e per ora mettiamo a stampa separatamente la prima. Questa comprende la teorica della retta, del piano, e delle superficie di secondo grado; onde può riguardarsi come una parte delle matematiche elementari. La seconda parte poi abbraccia la teorica generale delle superficie curve e delle curve

di doppia curvatura, e quindi può aversi come un ramo delle matematiche superiori, da potersi anche apprendere, almeno in parte, nello studio del Calcolo Differenziale.

Ora, questa divisione ci à obbligati a praticare nella prima parte alcuni pochi cangiamenti, intesi a renderla indipendente dal detto Calcolo (adoperato certe volte dall'autore a titolo di brevità), ed altresì dalla Trigonometria Sferica, il cui bisogno facendosi precipuamente sentire nella Geodesia e nell'Astronomia, si suole per lo più apprendere nello studio di queste scienze, e come preliminare alle medesime.

Le poche note per noi aggiunte a questa prima parte, si distinguono da quelle dell'autore per gli asterischi onde quest'ultime veggonsi contrassegnate.

Francesco Paolo Tucci.

TAVOLA DELLE MATERIE

CONTENUTE

IN QUESTA PRIMA PARTE.

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

Numeri.

CAPITOLO II.

Problemi sulle linee rette.

CAPITOLO III.

Dei piani, e delle combinazioni tra loro o colle linee rette.

CAPITOLO IV.

Trasformazione delle coordinate, e teoremi sulle proiezioni delle rette, e delle superficie piane.

CAPITOLO V.

Del centro nelle superficie, e particolarmente in quelle di secondo grado.

CAPITOLO VI.

Dei piani diametrali, e della riduzione dell'equazione generale di secondo grado alle due forme più semplici.

CAPITOLO VII.

Discussione delle superficie dotate di un centro.

CAPITOLO VIII.

Discussione delle superficie mancanti di centro.

CAPITOLO IX.

Teoremi diversi circa la simiglianza delle curve e delle superficie qualunque, circa le sezioni parallele delle superficie di secondo grado, ec.

CAPITOLO X.

Delle sezioni circolari nelle superficie di secondo grado.

CAPITOLO XI.

Dei piani diametrali coniugati obliqui.

CAPITOLO XII.

Discussione di una equazione numerica di secondo grado.

CAPITOLO XIII.

Dei piani tangenti alle superficie di secondo grado.

ANALISI

APPLICATA

ALLA GEOMETRIA DI TRE DIMENSIONI.

CAPITOLO I.

NOZIONI PRELIMINARI.



1. Per applicare l' analisi alla Geometria considerata nelle tre dimensioni dello spazio, fa d'uopo, come su di un piano, cercare primieramente il modo di esprimere per via di equazioni la posizione dei punti e delle linee. Ora, se immaginiamo tre piani fissi e noti di posizione, ma tali che s'intersechino tutti in un medesimo punto O (*fig. 1*), ed a due a due secondo delle rette distinte OX, OY, OZ, chiamate *assi delle coordinate;* e quindi per un punto qualunque M dello spazio abbassiamo su questi piani fissi, e *parallelamente agli assi*, le rette MA, MB, MC; queste tre distanze diconsi le *coordinate* del punto M; e siccome esse generalmente cambiano di grandezza pei diversi punti dello spazio, noi le contrassegneremo rispettivamente colle variabili x,y,z. Ciò posto, io dico che un punto M è determinato di posizione allorquando si conoscono i valori delle sue tre coordinate

cioè quando si hanno l'equazioni $x=a$, $y=b$, $z=c$. Difatti se si porta su di OX una distanza OD eguale ad a, e per l'estremo D conducesi parallelamente ad YZ, un piano indefinito BDC, questo piano palesemente conterrà tutt'i punti dello spazio pei quali la coordinata x è eguale ad a, e per conseguenza anche il punto M in quistione. Similmente portando su di OY ed OZ le distanze $OE=b$, ed $OF=c$, e poscia menando pei punti estremi E, ed F due piani indefiniti AEC ed AFB, rispettivamente paralleli ad XZ ed XY, vedesi che il punto cercato deve contenersi anche in questi due nuovi piani; ond'è che essi determineranno mediante le loro intersegazioni con CDB, un punto unico M di posizione, il quale altro non è che il vertice di un parallelepipedo obbliquo costruito sui tre spigoli OD, OE, OF, eguali alle coordinate MA, MB, MC.

2. Nondimeno per completare la determinazione del punto M, bisogna nell'equazioni $x=a$, $y=b$, $z=c$, tener conto dei *segni* delle quantità a,b,c, onde portare queste distanze sulle *parti positive* OX, OY, OZ degli assi coordinati, ovvero sui loro prolungamenti OX', OY', OZ', siccome spiegasi nell'analisi applicata alla Geometria di due dimensioni; altrimenti vi sarebbero otto soluzioni, essendochè i tre piani fissi, i quali si hanno a considerare come indefinitamente prolungati, formano intersegandosi otto angoli triedri, in ciascuno dei quali il punto M potrebbe essere allogato a distanze assolute a,b,c.

Senza soffermarci quì sulle combinazioni dei segni che corrispondono a questi diversi angoli, ma che il lettore deve rendersi familiari, noi diremo solamente che quando il punto M è situato

nell'angolo $OXYZ$, si ha $x=+a$, $y=+b$, $z=+c$;
nell'angolo $OX'YZ$, ... $x=-a$, $y=+b$, $z=+c$;
nell'angolo $OXY'Z$, ... $x=+a$, $y=-b$, $z=+c$;
nell'angolo $OX'Y'Z$, ... $x=-a$, $y=-b$, $z=+c$;

quindi per gli angoli triedri situati al di sotto del piano XY, si ha

nell'angolo $OXYZ'$, ... $x=+a$, $y=+b$, $z=-c$;
nell'angolo $OX'YZ'$, ... $x=-a$, $y=+b$, $z=-c$;
nell'angolo $OXY'Z'$, ... $x=+a$, $y=-b$, $z=-c$;
nell'angolo $OX'Y'Z'$, ... $x=-a$, $y=-b$, $z=-c$.

3. I piedi A, B, C delle tre coordinate del punto M diconsi *le proiezioni* di questo punto, *fatte parallelamente alle rette* OX, OY, OZ; ed esse diverrebbero le *proiezioni ortogonali*, se i piani coordinati si scegliessero per modo che ciascuno fosse perpendicolare agli altri due, come ordinariamente si adopera. In ogni caso giova notare:

1.° Che *un punto dello spazio ha sempre due coordinate comuni con ciascuna sua proiezione;* così M e C hanno palesemente la stessa x, $MA=CE$; e la stessa y, $MB=CD$: M e B hanno le coordinate comuni $x=MA=BF$, e $z=MC=BD$; ed infine M ed A hanno la stessa y, $MB=AF$; e la medesima z, $MC=AE$.

2.° Che *due proiezioni di uno stesso punto hanno sempre una coordinata comune;* di fatti le proiezioni B e C hanno la medesima x, $BF=CE$: B e A hanno la stessa z, $BD=AE$: A e C la medesima y, $AF=CD$.

4. Dopo ciò, è agevol cosa il vedere che le tre equazioni $x=a$, $y=b$, $z=c$, le quali determinano il punto M, equivalgono al conoscere due delle sue proiezioni: *dati* che bastano in Geometria *descrittiva* a fissare la posizione di quel punto. Di fatti, per determinare analiticamente la proiezione C sul piano XY, bisognerebbe dare due equazioni come $x=a$, $y=b$: e per la proiezione B, due altre $x=a'$, e $z=c$; ma queste quattro equazioni riduconsi a tre, dappoichè per la seconda osservazione del numero precedente, devesi aver sempre la condizione $a'=a$.

Questa dipendenza tra le proiezioni di uno stesso punto su due piani, ritrovasi nella Geometria descrittiva; essendochè è noto che dopo l'abbattimento di un piano sull'altro, le due proiezioni ortogonali debbono sempre star situate su di una medesima perpendicolare alla *linea di terra*.

5. Inoltre, qualora le due proiezioni C e B sono fissate per mezzo dell'equazioni $x=a$, ed $y=b$; $x=a$, e $z=c$, la terza proiezione A ne seguita necessariamente; poichè dovendo avere (n.° 3) la stessa y della proiezione C, e la stessa z della proiezione B, essa trovasi assegnata dall'equazioni $y=b$, e $z=c$. Se inoltre si volesse dedurre graficamente il punto A dalle due proiezioni C e B, è evidente che basterebbe segnare sui piani fissi, e parallelamente agli assi, le rette CE e BF, EA ed FA.

6. Dappoichè un punto è determinato per le sue tre coordinate, se si assegnano in numeri quelle dei punti M' (*fig. 2*) ed M'', dev' essere possibile il calcolare la distanza di questi due punti; il che verremo esponendo nella ipotesi degli assi rettangolari (veggasi pel caso degli assi obliqui il n.° 78). Tiriamo adunque le coordinate $M'C'=z'$, $C'D'=y'$, $OD'=x'$ relative ad M', e le coordinate $M''C''=z''$, $C''D''=y''$, $OD''=x''$, le quali si rapportano ad M''; quindi, congiunti questi due punti, tiriamo la retta $M''P$ parallela a $C''C'$. Il triangolo $M'M''P$ riuscendo rettangolo in P, com'è evidente, dà

$$M'M''=\sqrt{\overline{M''P}^2+(z'-z'')^2};$$

ma se tirasi $C''Q$ parallela ad OX, il triangolo $C''QC'$ sarà del pari rettangolo in Q, e somministra l'equazione

$$\overline{M''P}^2=\overline{C''C'}^2=(x'-x'')^2+(y'-y'')^2:$$

donde ritraesi per la distanza richiesta,

$$M'M''=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}.$$

Se si trattasse di avere la distanza del punto M' dall'origine O, basterebbe indicare che M'' coincide con quest'ultimo punto, ponendo $x''=o$, $y''=o$, $z''=o$, e risulterebbe

$$OM'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}.$$

In queste due formole dovrà sempre prendersi il radicale positivamente, essendochè non trattasi che della distanza assoluta dei due punti proposti.

7. Prima di occuparci delle linee, fa d'uopo generalizzare le idee quanto al significato geometrico delle equazioni ad una o a più variabili, volendo abbracciare le tre dimensioni dello spazio. Primieramente, una sola equazione, come $x=a$, conviene, anche supponendo obliqui gli assi, a tutt'i punti che si rattrovano ad una distanza a dal piano YZ, contandosi questa distanza parallelamente ad OX; ed essa d'altronde, non appartiene, com'è evidente, che a questi soli punti: per conseguenza l'equazione $x=a$ rappresenta, nella geometria a tre dimensioni, *un piano indefinito parallelo ad YZ.* Parimenti l'equazione $y^2+py+q=o$, che dà due valori costanti $y=a\pm b$, ha per luogo geometrico due piani paralleli ad XZ; ed in generale, *ogni equazione ad una sola variabile rappresenta uno o più piani paralleli ai due assi le cui coordinate non entrano in questa equazione.*

Di quì risulta che $z=o$ è l'equazione caratteristica del piano XY indefinitamente prolungato, e che $y=o$ ed $x=o$ rappresentano gli altri due piani coordinati XZ ed YZ.

8. Una equazione a due variabili $f(x,y)=o$ appartiene sul piano XY ad una sequela di punti che generalmente formano una curva $CC'C''$ (*fig.* 3); ma se pei diversi punti di questa linea si conducano le parallele all'asse OZ, si otterrà una ***superficie cilindrica*** nel senso generale di questa voce. Ora un punto qualunque N di questa superficie, qualunque siasi la z, avrà sempre la stessa x e la stessa y della sua proiezione C (n.° 3); per conseguenza le coordinate di tutt'i punti di questo cilindro soddisferanno alla relazione $f(x,y)=o$, ***la quale non racchiude la variabile z***; mentre che ogni punto L preso fuori di questa superficie, avendo una proiezione G che non cade sulla curva $CC'C''$, non può, colle sue coordinate $x=OH$, $y=GH$, soddisfare l'equazione proposta. Da ciò devesi conchiudere che l'equazione $f(x,y)=o$ ***rappresenta una superficie cilindrica parallela all' asse*** OZ, e la cui *traccia* sul piano XY è data anche per la stessa equazione, quando ci limitiamo a considerare due dimensioni dello spazio. Una conseguenza analoga si applica all'equazioni $f'(x,z)=o$, o $f''(y,z)=o$, delle quali ciascuna, presa isolatamente, appartiene ad un ***cilindro parallelo*** ad OY o ad OX, cioè ***parallelo all' asse delle coordinate che non entrano nell' equazione***.

9. Osserviamo di passaggio, che se volesse definirsi analiticamente la curva $CC'C''$ sola, bisognerebbe adoperare l'equazioni simultanee $f(x,y)=o$, e $z=o$; dappoichè in tal caso non si avrebbero su tutto il cilindro che i soli punti della sua base, i quali verificassero ad un tempo le due relazioni citate.

10. Senza ripetere analoghi ragionamenti si può conchiudere, come caso particolare del precedente, che quando la equazione a due variabili è del primo grado, vale a dire della forma $y=ax+b$, essa appartiene non solamente ad *una retta* PQ (*fig.* 3) di cui si sa determinare la posizione sul piano XY, ma ancora *a tutt' i punti del piano* $PQRS$ *condotto per questa retta parallelamente all' asse* OZ; in fatti questo piano altro non è che un cilindro la cui base è rettilinea. Similmente una equazione di primo grado come

$mx+nz=p$, ovvero $my+nz=q$, rappresenterà un piano parallelo ad OY, o ad OX.

11. Finalmente quando l'equazione proposta racchiude tre variabili, come $F(x,y,z)=o$, ve ne sono necessariamente due, alle quali si può dare dei valori arbitrari; se dunque facciamo solamente $z=c$, l'equazione $F(x,y,c)=o$ conterrà ancora due variabili, e rappresenterà (n.° 8) una superficie cilindrica parallela ad OZ; ma siccome qui debbonsi prendere i soli punti di questa superficie che soddisfano alla condizione $z=c$, ne risulta così, per questa prima ipotesi, una *curva*, che è la sezione fatta in questo cilindro dal piano $z=c$, parallelo ad XY. Se poscia poniamo $z=c'$, si troveranno tutt'i punti della curva tracciata dal piano $z=c'$ nel cilindro $F(x,y,c')=o$; e continuando in tal modo, si otterrà un numero infinito di curve diverse situate in piani paralleli ad XY, e ravvicinate, quanto si vuole, le une alle altre: per conseguenza il luogo geometrico di una equazione a tre variabili $F(x,y,z)=o$, è *una superficie* la cui natura dipenderà dalla forma della funzione F.

D'altronde non potrebbe supporsi essere un solido questo luogo geometrico, essendochè in tal caso ogni piano segante dovrebbe dare per sezione un' *area*, mentre esso intersegando la *superficie* cilindrica $F(x,y,c)=o$ non produce che *una curva* ad uno o più rami, identica alla base di questo cilindro.

12. Da questa discussione risulta che *ogni equazione isolata, la quale rinchiuda una, due, ovvero tre variabili, rappresenta una superficie;* la quale nondimeno diviene interamente immaginaria, qualora niun sistema di valori reali soddisfi alla equazione proposta; ovvero, se non vi si può soddisfare che dividendo questa equazione in due o tre altre, la superficie riducesi a un numero limitato di *linee reali*, o di *punti reali;* giacchè allora si riviene al sistema di più *equazioni simultanee.* Non fa mestieri qui considerare equazioni che racchiudano più di tre variabili propriamente dette, essendochè ogni punto dello spazio è sufficientemente determinato dalle sue tre coordinate: pertanto, se si riguardino le variabili al di sopra di tre non già come delle coordinate, ma come *parametri* che influirebbero sulla forma e la posizione di ogni superficie individuale, si cadrebbe sui

solidi e sulla teorica delle *superficie inviluppi*, delle quali si terrà parola più tardi (n.[i] 277 e 337).

13. Inoltre, se si combinano *due equazioni simultanee* $F(x,y,z)=o$, e $F'(x,y,z)=o$, cioè tali che in esse le variabili avessero i medesimi valori nel tempo stesso, il che non ne lascia più che una sola arbitraria, come per esempio la z, questo sistema rappresenterà *una linea* retta o curva, non potendo convenire che ai punti situati ad un tempo sulle due superficie, ossia nella loro comune intersecazione. Reciprocamente, il solo mezzo per definire una curva nello spazio essendo quello di assegnare due note superficie, di cui essa sia l'intersecazione, non potremo rappresentare analiticamente questa linea che per via di due equazioni simultanee. A ciò riducesi infatti *il metodo delle proiezioni*, che andremo ad esporre, ed il cui vantaggio consiste in questo, che fra un numero indefinito di differenti superficie che possono passare per una data curva, questo metodo adopera con preferenza *due cilindri, ciascuno dei quali è parallelo ad uno degli assi coordinati*, e le cui equazioni si trovano per conseguenza più semplici, giacchè, pel n° 8, ciascuna di esse non racchiude che due variabili.

14. Cominciamo dalle linee rette, e per vie meglio fissare le idee, supponiamo gli assi rettangolari, riguardando OZ (*fig. 4*) come verticale. Allora, immaginando per tutti i punti della retta MM'' nello spazio, condotte le perpendicolari al piano XY (se gli assi fossero obliqui, bisognerebbe dire: *le parallele ad* OZ), esse incontreranno quel piano nei punti $C, C', C'', \ldots$ il cui insieme formerà ciò che chiamasi la proiezione di MM'' su quel piano; e questa proiezione sarà sempre *rettilinea*, dappoichè le perpendicolari saranno palesemente situate tutte in un medesimo piano parallelo ad OZ, il quale chiamasi *il piano proiettante* di MM''. Se si proietta parimenti questa retta sui due altri piani fissi per mezzo delle perpendicolari (o generalmente per mezzo di linee parallele all'asse ch'è fuori del piano che si considera), si otterranno le tre proiezioni AA'', BB'', CC'', due delle quali bastano a determinare la retta MM''.

Difatti, supponiamo che si diano le AA'' e BB''. Concependo per la prima un piano parallelo all'asse OX, e per la seconda un altro parallelo ad OY, questi due piani, la

cui posizione non ha più nulla d'arbitrario, dovranno ad evidenza rinchiudere ciascuno la retta MM'', e ne determineranno la posizione nello spazio colla loro intersecazione.

15. Ciò posto, la proiezione BB'' sarà determinata sul piano XZ qualora si darà la sua equazione, che su quel piano si troverà della forma

$$(1) \quad x=az+p,$$

nella quale è noto che p contrassegna l'ordinata OG del punto d'incontro con OX, e che $a=\tan GIZ$. L'altra proiezione AA'' sarà determinata sul piano YZ per una equazione come

$$(2) \quad y=bz+q,$$

ove $q=OH$, e $b=\tan HKZ$. Per conseguenza, l'insieme dell'equazioni (1) e (2) determina compiutamente la retta MM'' nello spazio; e benchè esse sieno quì considerate come appartenenti alle sole proiezioni di questa linea, pure, per quel che è detto nel n.° 10, si debbono riguardare più generalmente come l'equazioni dei due piani proiettanti $MBGR$, $MAHR$, perpendicolari l'uno ad XZ, l'altro ad YZ, i quali colla loro intersecazione fissano la posizione di MM'' nello spazio. Ciò conferma e chiarisce quanto si è nel n.° 13 annunziato.

16. È importante l'osservare che quand'anche gli assi fossero obliqui, le proiezioni BB'' ed AA'', purchè sieno fatte parallelamente agli assi, come si è indicato (n.° 14), avrebbero sempre equazioni della forma (1) e (2); soltanto le costanti a e b cambierebbero di significato, rappresentando allora rapporti di seni, come si dimostra nell'analisi applicata alla geometria di due dimensioni.

17. Notiamo inoltre che nell'equazioni simultanee (1) e (2), le variabili x, y, z, si riferiscono ai punti corrispondenti delle proiezioni BB'' ed AA'', cioè a dire che ponendo a cagion d'esempio $z=OF$, devesi trovare $x=FB$, ed $y=FA$. Da ciò si scorge: 1.° che queste variabili rappresentano anche le coordinate MC, MA, MB di ciascun punto M situato sulla retta nello spazio; talchè quest'equazioni possono chiamarsi quelle della linea stessa MM'': 2.° che i valori $x=FB$, $y=FA$, sono ancora eguali alle coordinate CE, CD del punto C della proiezione CC''; e per conseguenza *l'equa-*

zione di questa terza proiezione si dedurrà sempre dalle due prime eliminando z tra (1) e (2), il che dà

$$(3) \quad \frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}, \text{ ovvero } y=\frac{b}{a}x+\frac{aq-bp}{a},$$

per equazione della linea CC'', o piuttosto del *piano proiettante* verticale MCR.

18. Scorgesi parimente da ciò, che sarebbe agevole il dedurre graficamente la terza proiezione dalle due altre; dappoichè se si prendono su di AA'' e BB'' due sistemi di punti corrispondenti ad una medesima z, come A e B, A' e B', basterà tracciare *sui piani fissi* delle parallele ai diversi assi per dedurne la posizione dei punti C, C', che determineranno la retta CC'. (*a*)

19. Allorchè trattasi di una curva $MM'M''$...., s'immaginano anche per tutt'i punti di questa linea le perpendicolari al piano XY (ovvero, se gli assi sono obliqui, le parallele ad OZ): queste rette, il cui insieme formerà una *superficie cilindrica*, incontreranno il piano XY secondo una linea $CC'C''$...., che in generale sarà curva, e che si denomina *proiezione* di $MM'M''$ su questo piano.

Se si concepiscono parimente per la linea $MM'M''$ *due cilindri proiettanti*, paralleli l'uno ad OY, l'altro ad OX, si otterranno le altre proiezioni $BB'B''$...., $AA'A''$...; e la curva nello spazio sarà evidentemente determinata coll'assegnare due delle sue tre proiezioni, dovendosi in tal caso trovare nell'intersezione di due noti cilindri.

20. Ora le due proiezioni $BB'B''$ ed $AA'A''$, a cagion d'esempio, sono definite per mezzo di equazioni della forma

$$\left.\begin{matrix} f(x,z)=0 \\ f'(y,z)=0 \end{matrix}\right\}, \text{ ovvero } \left\{\begin{matrix} x=\phi(z) \ldots . (4), \\ y=\psi(z) \ldots . (5), \end{matrix}\right.$$

(*a*) In simil modo si desumerebbe la proiezione AA'' dalle due BB'' e CC''; e la costruzione diverrebbe semplicissima adoperando le due *tracce* R ed S della retta MM'', tracce che si ottengono menando pei punti G e T (dove le proiezioni date incontrano l'asse OX comune ai piani coordinati nei quali esse trovansi) le parallele GR e TS agli altri due assi OY, OZ. Difatti, conducendo per le tracce R, S le parallele RH, SK all'asse OX, i punti H, K dove queste rette intersegano gli altri due assi, determinano la terza proiezione AA''.

le quali nel loro significato completo rappresentano (n° 8) i *due cilindri proiettanti*, che hanno per basi le curve BB'' ed AA'': dunque la linea MM'' sarà determinata dal sistema dell'equazioni simultanee (4) e (5); e per le osservazioni del n° 17, l'equazione della terza proiezione $CC'C''$ si dedurrà da quelle, eliminandovi la variabile z.

21. La costruzione grafica di questa terza proiezione, che in generale non sarà rettilinea, esigerebbe che si ripetessero le costruzioni indicate al n° 18 per una retta, su diversi punti delle curve BB'' ed AA'', numerosi e ravvicinati abbastanza da poterne unire i risultamenti con un tratto continuo.

Stabiliti oramai questi principî, facciamoci a risolvere diversi problemi relativi alle linee rette, e che verranno inoltre come mezzi di soluzione per altre più alte quistioni.

CAPITOLO II.

PROBLEMI SULLE LINEE RETTE.



22. Allorquando l'equazioni di una retta

$$(1)\quad x = az + p\,,\qquad (2)\quad y = bz + q\,,$$

sono date, cioè quando le costanti a, b, p, q son note, egli è facile ottenere le *tracce* di questa linea. Se si volesse infatti trovare la traccia R sul piano XY, rammentandosi (n° 7) che l'equazione $z = 0$ caratterizza tutt'i punti di questo piano, questa condizione introdotta nell'equazioni (1) e (2) somministrerà $x = p$, ed $y = q$, per le coordinate di R. Si otterrebbero le due altre tracce ponendo successivamente $y = 0$, ed $x = 0$.

23. Potrebbesi, per lo contrario, proporre di determinare le costanti generali a, b, p, q, per mezzo di talune condizioni alle quali debba andar soggetta la retta. Richiediamo, per esempio, che *questa linea passi per due noti punti* M' ed M'' (*fig.* 2), le cui coordinate son contrassegnate da x', y', z', ed x'', y'', z''. Allora bisognerà che l'equazioni generali (1) e (2) siano verificate col sostituire questi due sistemi di co-

ordinate in luogo di x, y, z, il che fornisce le condizioni

$$(3)\quad x' = az' + p, \quad (4)\quad y' = bz' + q$$
$$(5)\quad x'' = az'' + p, \quad (6)\quad y'' = bz'' + q,$$

donde potranno dedursi i valori delle quattro costanti, per indi sostituirli in (1) e (2): ma si perviene al medesimo risultamento in un modo più elegante, eliminando per via di sottrazioni, come nell'analisi applicata alla geometria di due dimensioni, le incognite a e p tra l'equazioni (1), (3), (5); e le incognite b e q tra (2), (4), (6). In tal modo si ottengono per equazioni della retta $M'M''$,

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'),\ y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z').$$

24. Se la retta richiesta dovesse passare soltanto pel punto (x',y',z'), non si dovrebbero aggiungere all'equazioni generali (1) e (2) che le condizioni (3) e (4); e così eliminando p e q si avrebbero per *equazioni di una retta obbligata a passare per un punto*,

$$x-x'=a(z-z'),\ y-y'=b(z-z'),$$

nelle quali le costanti a e b rimangono indeterminate, come dovea risultare. Ma se si vuole dippiù che la richiesta linea fosse *parallela ad una retta data*, e rappresentata da

$$x=a'z+p',\ y=b'z+q', \qquad (D')$$

bisognerà che i piani proiettanti di queste due rette, e quindi le proiezioni di esse fossero *rispettivamente* parallele; il che somministra due novelle condizioni $a=a'$, $b=b'$; e la retta dimandata verrà rappresentata finalmente da

$$x-x'=a'(z-z'),\ y-y'=b'(z-z'). \quad (D)$$

Se l'origine O è il punto dal quale vuolsi condurre una parallela alla retta (D'), l'equazioni (D) si ridurranno palesemente alla forma semplicissima

$$x=a'z,\ y=b'z.$$

25. *Trovare il punto d'incontro di due rette conosciute*, e determinate dall'equazioni

$$(1)\quad x=az+p,\quad (2)\quad y=bz+q \quad \text{per la prima},$$
$$(3)\quad x=a'z+p',\quad (4)\quad y=b'z+q' \quad \text{per la seconda}.$$

Osserviamo primieramente che le variabili x ed y assumono

generalmente valori differentissimi nei sistemi (1) e (2), (3) e (4) per una stessa ipotesi $z=z'$: nondimeno se le due rette si tagliano, le coordinate del punto comune dovranno soddisfare ad un tempo i due sistemi, e per conseguenza esse si otterranno riguardando x, y, z, non come variabili, ma *come incognite che hanno gli stessi valori in quelle quattro equazioni*. Non trattasi adunque che di risolverle sotto questo punto di veduta; pur tuttavolta, poichè il loro numero sorpassa quello delle incognite, dovrà aversi *una equazione di condizione* senza la quale il problema sarà impossibile, poichè in fatti due rette nello spazio non s'incontrano sempre. Questa condizione si ottiene, com'è noto, eliminando le tre incognite: onde sottraendo (1) da (3), e (2) da (4), si ha

$$0=z\,(a'-a)+p'-p\,,\quad 0=z\,(b'-b)+q'-q\,;$$

poscia, eliminando la z tra queste due, ovvero esprimendo che i due valori ch'esse forniscono per z si accordano tra loro, si giunge alla condizione

$$(5)\qquad \frac{p'-p}{a'-a}=\frac{q'-q}{b'-b}.$$

Dunque se questa equazione non è resa identica dalle costanti dell'equazioni proposte, le due rette date non si tagliano; e qualora è soddisfatta, le coordinate del punto di sezione si otterranno sostituendo il valore comune

$$z=\frac{p'-p}{a-a'}=\frac{q'-q}{b-b'}\,,$$

in (1) e (2), ovvero in (3) e (4) indifferentemente.

26. Quando si ha $a=a'$, e $b=b'$, la condizione (5) trovasi soddisfatta, e frattanto le rette non s'incontrano, poichè sono parallele; ma insieme colla relazione (5) devesi chiaramente sottintendere, che il precedente valore di z non è infinito; o meglio convien dire che la condizione (5), presa isolatamente, esprime che *le due rette sono in un medesimo piano*, e possono tagliarsi, senza decidere a qual distanza avrà luogo il loro incontro.

N. B. Osserviamo qui che tutte le quistioni di cui si è fatto parola nei numeri 22, 23, 24, 25, si trattano allo stesso modo e conducono alle medesime formole, *quando gli assi*

sono obliqui; soltanto è cambiato il significato geometrico dei coefficienti a,b,a',b', come si è detto nel n.° 16.

27. *Trovare gli angoli che forma cogli assi rettangolari* OX, OY, OZ *(fig. 6.) una retta data*

$$x=az+p,\ y=bz+q;$$

e siccome questa potrebbe non incontrare gli assi, bisogna intendere con ciò gli angoli che formano questi assi con una retta OD, condotta per l'origine parallelamente alla retta primitiva.

L'equazioni di OD sono (n° 24) $x=az$, $y=bz$; quindi se si prende su questa retta una lunghezza arbitraria $OM'=r$, e si denotino con x',y',z' le coordinate del punto estremo M', si hanno per determinare i loro valori le tre equazioni

$$x'=az',\ y'=bz',\ x'^2+y'^2+z'^2=r^2,$$

delle quali le due prime esprimono che il punto M' è sulla retta OD, e l'ultima è la formola trovata nel n° 6. Da esse deduconsi facilmente

$$z'=\frac{r}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ y'=\frac{br}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ x'=\frac{ar}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Ciò posto, compiendo il parallelepipedo determinato dalle tre coordinate del punto M', e ponendo gli angoli richiesti $M'OX=\alpha$, $M'OY=\beta$, $M'OZ=\gamma$, si troverà pei triangoli rettangoli $M'QO, M'SO, M'TO$, le relazioni

$$(6)\quad \cos\alpha=\frac{OQ}{OM'}=\frac{x'}{r},\ \cos\beta=\frac{OS}{OM'}=\frac{y'}{r},\ \cos\gamma=\frac{OT}{OM'}=\frac{z'}{r};$$

e sostituendovi i valori delle coordinate trovate disopra, risulta

$$(7)\quad \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

28. Osserviamo qui, 1.° che questi coseni contengono un radicale suscettivo di ricevere il doppio segno $\pm$; ma questo radicale dovrà sempre essere affetto dal medesimo segno nei tre coseni al tempo stesso, e ciò non somministra che due sistemi di valori, che corrispondono ai *due angoli supplementari* formati dalla parte OD, e dal suo prolungamento OE, *coi semiassi positivi;* poichè in questo sol modo si hanno sempre a misurare gli angoli di una retta cogli assi coordinati.

2.° Che *questo radicale preso positivamente* si riferisce sempre ai tre angoli che forma cogli assi la *porzione* OD *che trovasi al di sopra del piano* XY, ovvero che fa un angolo acuto con OZ; essendochè allora, nelle formole (7) avendo $\cos\gamma$ un valore *positivo*, è certo essere acuto l'angolo γ. Nondimeno questo non impedisce che i due altri angoli α e β fossero ottusi o acuti, a seconda dei segni che avranno i numeratori a e b.

29. Il parallelepipedo adoperato disopra mostra che le *coordinate* $x'=OQ$, $y'=OS$, $z'=OT$, *di un punto qualunque* M', *sono le proiezioni sugli assi del raggio vettore* $OM'=r$; e l'equazioni (6) danno i valori di queste coordinate sotto la forma

$$x'=r\cos\alpha,\ y'=r\cos\beta,\ z'=r\cos\gamma.$$

Parimenti se una retta finita $M'M''$ (*fig.* 2.) ha per coordinate dei suoi estremi x', y', z', ed x'', y'', z'', e conduconsi per questi due punti sei piani paralleli ai piani coordinati, si formerà un parallelepipedo rettangolo i cui spigoli sono chiaramente $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$; per modo che gli *angoli* α, β, γ, *formati dalla diagonale* $M'M''=D$ con questi spigoli o *cogli assi*, saranno determinati dalle relazioni seguenti, che sono spesso adoperate,

$$\cos\alpha=\frac{x'-x''}{D},\ \cos\beta=\frac{y'-y''}{D},\ \cos\gamma=\frac{z'-z''}{D},\quad (a)$$

(*a*) Appunto perchè queste formole sono frequentemente adoperate, vuolsi notare con attenzione che le medesime, nella ipotesi che D si riguardi come una quantità assoluta o positiva, esprimono precisamente gli angoli che la congiungente dei punti M', M'', distesa nel senso $M''M'$...(e non nel senso opposto $M'M''$...) comprende cogli assi coordinati positivi, o più veramente con tre parallele ai detti assi, menate per un punto qualunque di quella congiungente; talchè menando per M'' le dette parallele, si avrebbe

$$\cos M'M''x=\frac{x'-x''}{D},\ \cos M'M''y=\frac{y'-y''}{D},\ \cos M'M''z=\frac{z'-z''}{D}.$$

Non insistiamo sulla dimostrazione di questa particolarità, siccome cosa agevolissima, ma sì bene sulla necessità di porvi mente; non essendo raro incontrare (anche in libri di sommi geometri) risultamenti discordi tra essi o dal vero, per solo difetto di simili avvertenze.

nelle quali è noto (n.° 6) d'altronde che

$$D=\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}.$$

30. Allorquando si conoscono a priori gli angoli α,β,γ che una retta qualunque forma cogli assi, è agevole il dedurne i coefficienti a e b, che entrano nell'equazioni delle sue proiezioni; poichè dalle formole (7) del n.° 24, ritraesi col mezzo della divisione $\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=a, \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=b$; per modo che quando una retta dovrà passare per un dato punto (x'',y'',z'') e formare cogli assi gli angoli α,β,γ, le sue equazioni potranno scriversi sotto la forma simmetrica

$$\frac{x-x''}{\cos\alpha}=\frac{y-y''}{\cos\beta}=\frac{z-z''}{\cos\gamma}.$$

31. Sommando le formole (7) del n° 24, dopo averle innalzate a quadrato, si ottiene questa notabilissima relazione:

$$(8) \qquad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

la quale mostra che i tre angoli formati da una stessa retta cogli assi non possono giammai prendersi tutti ad arbitrio. Quando son dati α,β, per esempio, il terzo è determinato da $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}$, e non è più suscettibile che di di *due valori supplementari* l'un dell'altro; e pure fa d'uopo che i due primi angoli soddisfino alla condizione $\cos^2\alpha+\cos^2\beta<1$, o pure $=1$. Ciascuno potrà persuadersi di queste diverse circostanze per mezzo di due coni retti, che avessero per assi OX ed OY, e dei quali le generatrici formassero con questi assi angoli eguali ad α e β; poichè la retta in quistione dovrebbe essere nel tempo stesso su queste due superficie coniche, le quali non possono tagliarsi che secondo due generatrici situate simmetricamente, una al di sopra e l'altra al di sotto del piano XY.

32. *Trovare l'angolo che formano tra loro due rette* rappresentate da

$$x=az+p \quad \text{ed} \quad y=bz+q,$$
$$x=a'z+p' \quad \text{ed} \quad y=b'z+q';$$

ma siccome queste linee possono non incontrarsi, fa d'uopo intendere perciò *l'angolo compreso tra due rette condotte per uno stesso punto, e parallelamente alle linee primitive.*

Siano dunque OD ed OD' (*fig.* 6) queste due parallele; le loro equazioni saranno (n° 24)

$$(D) \quad x = az, y = bz,$$
$$(D') \quad x = a'z, y = b'z;$$

quindi se si prendono su queste rette due punti M', M'' ad una distanza qualunque dall'origine, tale per esempio che fosse $OM' = 1, OM'' = 1$, e si congiungono questi due punti, il triangolo obliquangolo $OM'M''$ darà, per un teorema conosciuto,

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 - 2\overline{OM'}.\overline{OM''}.\cos(M'OM'').$$

Ma se si contrassegnano con x', y', z' ed x'', y'', z'' le coordinate dei due punti M' ed M'', questa equazione diverrà

$$(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2 = 1 + 1 - 2\cos(D, D'),$$

e sviluppandone i quadrati, essa riducesi a

$$(9) \quad \cos(D, D') = x'x'' + y'y'' + z'z'',$$

giacchè si hanno chiaramente (n° 6) le relazioni

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1,$$

alle quali inoltre aggiungendo le seguenti

$$x' = az', \quad x'' = a'z'',$$
$$y' = bz', \quad y'' = b'z'',$$

esprimenti che i punti M', M'' sono sulle rette (D), (D'), potranno agevolmente calcolarsi le coordinate di questi punti, e si troveranno

$$z' = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$z'' = \frac{1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, y'' = \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}}, x'' = \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

talchè sostituendo questi valori nell'equazione (9), si avrà per determinare l'angolo delle due rette, la formola seguente

$$(10) \quad \cos(D, D') = \frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Volendosi calcolare il seno di questo angolo, si adopera

la relazione generale $sen = \sqrt{1 - cos^2}$, la quale conduce all'espressione

$$\operatorname{sen}(D,D') = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+1}\ \sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

e quindi dedurrebbesi la tangente.

33. La formola ottenuta per $\cos(D,D')$ racchiude due radicali, suscettivi ciascuno del segno $\pm$, il che fornisce, volendo, quattro valori eguali a due a due, e che corrispondono ai quattro angoli formati dalle rette indefinite DOE, $D'OE'$; ma importa notare che ogni qualvolta i due radicali sono affetti dal *medesimo segno*, cioè quando si prende il denominatore *positivamente*, il valore del coseno conviene necessariamente all'angolo *DOD' formato dalle due porzioni che fanno ciascuna un angolo acuto con OZ*, ovvero al suo opposto al vertice EOE'.

Infatti per questi due angoli i punti M' e M'', che servono a costruire il triangolo sul quale è instituito il calcolo, debbono avere le loro ordinate z' e z'' *tutte due positive*, o *tutte due negative*: dunque risalendo ai valori trovati di sopra per z' e z'', egli è certo che i due radicali debbono essere affetti dal medesimo segno. Nulladimeno questo angolo DOD' potrà ancora essere acuto od ottuso, secondo il segno del numeratore $aa' + bb' + 1$.

Quanto al valore del seno (D,D'), bisogna sempre assumerlo positivo, convenendo sotto questa forma ai quattro angoli supplementari a due a due.

34. Può anche esprimersi l'angolo che formano tra loro le due rette OD, ed OD' (*fig. 6*) in funzione degli angoli che ciascuna di esse fa cogli assi coordinati. Siano difatti $DOX = \alpha$, $DOY = \beta$, $DOZ = \gamma$, ed α', β', γ' gli angoli analoghi per la retta OD'; e perverremo, come nel n° 32, alla relazione

$$\cos(D,D') = x'x'' + y'y'' + zz'';$$

ma, giusta l'osservazione fatta nel n.° 29, e stante che si ha qui $OM' = 1 = OM''$, i valori delle coordinate saranno

$$x' = OM'.\cos\alpha = \cos\alpha,\ y' = \cos\beta,\ z' = \cos\gamma,$$
$$x'' = OM''.\cos\alpha' = \cos\alpha',\ y'' = \cos\beta',\ z'' = \cos\gamma';$$

i quali, sostituiti nell'equazione precedente, daranno per l'espressione richiesta,

$$(11)\quad \cos(D,D') = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma';$$

ovvero, adoperando la scrittura seguente, che rende sensibile la situazione di ciascun angolo,

$$(12)\quad \cos(D,D') = \cos(D,x)\cos(D',x) + \cos(D,y)\cos(D',y) + \cos(D,z)\cos(D',z).$$

35. Da ciò che precede è facile dedurre *la condizione perchè le rette siano perpendicolari l'una all'altra.* Importa in tal caso, ed è sufficiente che sia $\cos(D,D') = 0$; lo che per le formole (10) ed (11) fa risultare l'una o l'altra delle relazioni seguenti:

$$(13)\quad aa' + bb' + 1 = 0,$$

$$(14)\quad \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

le quali convengono alle primitive rette date n.° 32, come pure alle altre OD ed OD' che si tagliano. Circa queste ultime è da notarsi che la condizione (13) lascia ancora la seconda retta in parte indeterminata, laddove la prima è completamente fissata dai valori di a e b, non essendovi qui che una equazione tra i due coefficienti a', e b'; e dovea così essere, perchè nello spazio esistono infinite rette condotte per lo stesso punto O perpendicolarmente alla retta OD.

Volendosi esprimere anche per mezzo della formola (10) che le rette sono parallele, bisognerebbe porre $\cos(D,D') = 1$; il che mena all'equazione

$$(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab'-a'b)^2 = 0,$$

la quale non può essere soddisfatta che da $a=a'$, e $b=b'$; e così saremmo ricondotti alle condizioni trovate nel n.° 24.

CAPITOLO III.

DEI PIANI, E DELLE COMBINAZIONI TRA LORO O COLLE LINEE RETTE.



36. Affine di pervenire all'equazione del piano, noi riguarderemo *questa superficie come il luogo geometrico delle diverse posizioni che prende una retta movibile, assoggettita a scorrere su di una retta fissa, restando parallela ad una data direzione;* e questo metodo avrà il vantaggio d'indicarci anticipatamente il procedimento da seguirsi per esprimere in modo analitico la generazione delle superficie curve.

Siano dunque

$$(1)\quad x = az + p, \qquad (2)\quad y = bz + q,$$

l'equazioni della retta fissa che si denomina la *direttrice;* e rappresentando con $x = a'z$, $y = b'z$ la retta a cui la generatrice movibile deve rimanere costantemente parallela, l'equazioni di questa generatrice avranno la forma

$$(3)\quad x = a'z + p', \qquad (4)\quad y = b'z + q';$$

e qui a', b' saranno delle costanti date ed invariabili, laddove p' e q' varieranno con ciascuna posizione della generatrice, ma non in maniera interamente arbitraria, essendochè bisogna ancora esprimere che *la retta mobile ha* in tutte le sue posizioni un punto di comune colla direttrice fissa, vale a dire che l'equazioni (1), (2), (3), (4) debbono essere verificate da un medesimo sistema di valori di x, y, z. Ora, poichè il numero di queste equazioni sorpassa di una unità quello delle incognite, ciò non potrà succedere se non quando esiste tra i coefficienti una relazione, che si ottiene eliminando le tre incognite x, y, z, come si è visto nel n° 25, e che è della forma

$$(5)\qquad \frac{p'-p}{a'-a} = \frac{q'-q}{b'-b}.$$

È questa dunque una condizione da doversi essenzialmente aggiungere all'equazioni (3) e (4), perchè rappresentassero compiutamente la generatrice. Ciò posto, attribuendo successivamente a p' diversi valori, $p' = 1, 2, 3 \ldots$, e ricavan-

do dalla relazione (5) i valori corrispondenti di q', per sostituire gli uni e gli altri in (3) e (4), si otterrebbero *successivamente* l'equazioni determinate di tale o tal'altra posizione particolare della generatrice; ma se invece di fissare così i valori di p' e q', si eliminano queste due costanti tra l'equazioni (3), (4), (5), *l'equazione finale* in x, y, z, *converrà allora a tutte* le posizioni della generatrice, poichè essa non racchiuderà più le quantità p' e q', i cui valori particolari soltanto possono distinguere una generatrice da un'altra; per conseguenza il risultamento di questa eliminazione sarà l'*equazione* della *superficie piana*, luogo di tutte le generatrici. Ora sostituendo in(5) i valori di p' e q', tratti da (3) e (4), trovasi

$$\frac{x-a'z-p}{a'-a}=\frac{y-b'z-q}{b'-b},$$

ovvero

$$(6)\quad x(b-b')+y(a'-a)+z(ab'-ba')+p(b'-b)+q(a-a')=0,$$

risultamento che prova *essere l'equazione del piano sempre di primo grado*; *la quale generalmente* racchiudendo tre variabili, è della forma

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

37. Reciprocamente, *ogni equazione di primo grado*, come

$$(7)\qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

appartiene ad una superficie piana. Per dimostrarlo cerchiamo dapprima *la traccia* della *superficie* (7), qualunque essa siasi, su di uno dei piani coordinati, per esempio XZ; e siccome $y=0$ esprime (n° 7) la proprietà caratteristica di questo piano, combinando questa relazione coll'equazione (7), scorgiamo essere questa traccia *una retta PR* rappresentata da

$$(8)\quad y=0,\ \text{ed}\ Ax+Cz+D=0.\ (9)$$

Ciò posto, imitando il procedimento seguito nel n.° 11, tagliamo la superficie ignota (7) con diversi piani paralleli ad XY, come $z=\alpha$, $z=\alpha'$, ... Le sezioni verranno rappresentate dall'equazioni simultanee

$$(10)\quad z=\alpha\ \text{ed}\ Ax+By+(C\alpha+D)=0,\ (11)$$

$$z=\alpha'\ \text{ed}\ Ax+By+(C\alpha'+D)=0,\ \text{ec.}$$

risultate, la cui forma dimostra (num. 15, 17) che queste diverse sezioni sono *delle rette tutte parallele tra loro* (n° 24), e dico inoltre *che ciascuna ha un punto di comune colla traccia PR;* dappoichè, se a norma della regola data nel n.° 25, si combinano insieme l'equazioni (8), (9), (10) ed (11) per eliminarne dapprima y e z, si giunge alle due equazioni

$$Ax+C\alpha+D=0\,,\,Ax+(C\alpha+D)=0\,,$$

le quali si accordano a dare per x il medesimo valore. Ora accadendo evidentemente lo stesso col sostituire $\alpha', \alpha'', \ldots$ in luogo di α, conchiudesi che la superficie (7) è il *luogo di infinite rette parallele, le quali si appoggiano tutte su di una retta fissa PR;* donde seguita che questa superficie è *un piano* (n° 36).

È qui da notarsi che questa maniera di dimostrazione può applicarsi all'equazione (7), anche quando uno o due coefficienti A, B, C fossero nulli, purchè in tal caso si scelgano convenevolmente la traccia che serve di direttrice fissa, e la direzione dei piani seganti; ma d'altronde è già noto (n[i] 10 e 7) che una equazione di primo grado, della forma particolare

$$By+Cz+D=0\,,\ \text{ovvero}\ Cz+D=0\,,$$

rappresenta *un piano* che trovasi parallelo ad *uno* o a *due* degli assi coordinati; cosicchè la reciproca enunziata trovasi vera in tutt' i casi.

38. È importantissimo altresì l'osservare che i calcoli ed i ragionamenti adoperati nei n.[i] 36 e 37, rimangono gli stessi e senza veruna modifica ***nel caso degli assi obliqui;*** per conseguenza l'equazione del piano riferito a tali assi è sempre di primo grado, e la reciproca ha luogo egualmente. Segue da ciò che tutte le formole, e le conseguenze alle quali noi perverremo nei numeri 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 54, e 60 saranno egualmente vere per assi coordinati obbliqui.

39. Allorchè l'equazione (7) $Ax+By+Cz+D=0$ di un piano è data, si ottengono *le sue tracce* combinando la detta equazione successivamente con una delle seguenti $x=0$, $y=0$, $z=0$, ciascuna delle quali caratterizza uno dei piani coordinati; cosicchè la traccia PQ sul piano XY sarà data dalle due equazioni simultanee

$$z=0\,,\,Ax+By+D=0\,;$$

la traccia PR sul piano XZ, da

$$y = 0,\ Ax + Cz + D = 0;$$

ed infine quella che trovasi su di YZ, cioè QR, da

$$x = 0,\ By + Cz + D = 0.$$

40. Per avere il punto ove il piano taglia l'asse OX (*fig.* 7), si porranno nel tempo stesso le condizioni $y = 0$, e $z = 0$, le quali caratterizzano chiaramente quest' asse; e sostituendo in (7), si ottengono per coordinate di quel punto P,

$$y = 0,\ z = 0,\ x = -\frac{D}{A} = OP;$$

similmente troverebbonsi pei punti Q ed R,

$$x = 0,\ z = 0,\ y = -\frac{D}{B} = OQ,$$

$$x = 0,\ y = 0,\ z = -\frac{D}{C} = OR.$$

Ponendo queste tre distanze $OP = p$, $OQ = q$, $OR = r$, ed introducendole nell' equazione (7) in luogo di A, B, C, l' equazione del piano prenderà questa forma simmetrica:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

41. Osserviamo ancora qui 1.° che se il piano proposto dovesse esser parallelo ad uno degli assi, per esempio OX, converrebbe che il valore trovato dinanzi per la distanza OP divenisse infinito, il che induce la condizione $A = 0$; per conseguenza l' equazione (7) si ridurrebbe per un tal piano a

$$By + Cz + D = 0.$$

2.° Che se il piano fosse ad un tempo parallelo ai due assi OX ed OY, ovvero parallelo al piano XY, i valori precedenti di OP e di OQ dovrebbero essere amendue infiniti, e quindi $A = 0$, e $B = 0$; laonde l' equazione (7) si ridurrebbe per tal piano a

$$Cz + D = 0,\ \text{ovvero}\ z = h.$$

Questi due risultamenti si erano già ottenuti nei n.ⁱ 7 e 10; ma come importa non poco di rendere familiari al lettore queste forme particolari dell' equazione del piano, noi abbiamo stimato di qui ritrovarle, per rammentargli che *quando*

un piano è parallelo ad UNO *o a* DUE *degli assi coordinati, la sua equazione non racchiude più* LA VARIABILE *o* LE VARIABILI *che si rapportano a questi assi.*

42. Allorquando invece di dare immediatamente l'equazione del piano, si assegnano talune condizioni alle quali questa superficie deve soddisfare, importa calcolare i coefficienti che entrano nell'equazione generale, per mezzo di alcuno dei metodi che andremo ad esporre percorrendo le diverse condizioni alle quali può un piano soddisfare.

Primieramente, se vuolsi che il *piano passi per tre punti* di cui son note le coordinate, che si contrassegnano con $x', y', z', x'', y'', z'', x''', \ldots$ l'equazione generale

$$(1) \quad Ax+By+Cz+D=0$$

dovrà essere soddisfatta sostituendo alle variabili le coordinate di ciascun punto, ciò che dà le relazioni

$$(2) \quad Ax' + By' + Cz' + D=0,$$
$$(3) \quad Ax'' + By'' + Cz'' + D=0,$$
$$(4) \quad Ax''' + By''' + Cz''' + D=0,$$

nelle quali non vi sono realmente che tre incognite, cioè i rapporti $\frac{A}{D}, \frac{B}{D}, \frac{C}{D}$; si potranno dunque calcolare facilmente, e sostituirle in (1), la quale non racchiude che questi medesimi rapporti. Eccone il risultato, prendendo la quantità arbitraria D per denominatore comune,

$$D=x'y''z'''-x'z''y'''+z'x''y'''-y'x''z'''+y'z''x'''-z'y''x''',$$
$$A=-y''z'''+z''y'''-z'y'''+y'z'''-y'z''+z'y'',$$
$$B=-x'z'''+x'z''-z'x''+x''z'''-z''x'''+z'x''',$$
$$C=-x'y''+x'y'''-x''y'''+y'x''-y'x'''+y''x'''.$$

43. Osserviamo che se si assegnasse soltanto un punto pel quale dovesse passare il piano, non si avrebbe in tal caso che la condizione (2), la quale potrebbe almeno servire ad eliminare da (1) la costante D, e l'equazione del piano prenderebbe la forma seguente, che bene spesso si adopera,

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0,$$

nella quale invero non rimarrebbero che *due incognite.*

44. *Condizioni perchè una retta fosse situata in un piano.*

Rappresentiamo l' equazioni di questi luoghi geometrici per

(1) $Ax+By+Cz+D=0$,

(2) $x=az+p$ ed $y=bz+q$. (3)

Se la retta è tutta nel piano, fa d'uopo che *per uno qualunque dei suoi punti*, e conseguentemente lasciando z indeterminata, i valori di x ed y tratti da (2) e (3) soddisfacciano all'equazione del piano. Ora sostituendoli in (1), risulta

$$(Aa+Bb+C)\,z+Ap+Bq+D=0;$$

e poichè questa equazione deve verificarsi per ogni valore della z, importa che siano nel tempo stesso

(4) $Aa+Bb+C=0$, (5) $Ap+Bq+D=0$:

e queste sono le condizioni richieste. Di qui è facile dedurre *l'equazione del piano obbligato a passare per la retta* (2) *e* (3), *e per un punto dato* (x',y',z'); giacchè aggiungendo alle condizioni (4) e (5) la relazione

$$Ax'+By'+Cz'+D=0,$$

si calcolerebbero i valori di tre dei coefficienti $A,B,C,D,$ in funzione del quarto, il quale svanisce come fattor comune.

45. *Relazione tra un piano ed una retta, paralleli tra loro.* Serbiamo la dicitura precedente, ed esprimiamo che *il punto d'incontro* del piano colla retta *è ad una distanza infinita*. Per questo punto comune le variabili debbono avere gli stessi valori nell'equazioni (1), (2), (3); fatte dunque le sostituzioni come per lo innanzi, risulta

$$z=-\frac{Ap+Bq+D}{Aa+Bb+C};$$

per conseguenza la relazione richiesta è

(6) $Aa+Bb+C=0$,

che corrisponde alla prima delle condizioni trovate nel numero precedente. Posto ciò, potremo *condurre per una retta data un piano parallelo ad un' altra retta,* aggiungendo alle relazioni (4) e (5) la condizione (6), nella quale si sostituiranno ad a e b le costanti a' e b' della seconda retta.

46. *Relazioni tra un piano ed una retta, perpendicolari tra loro.* Sotto il punto di veduta geometrica queste relazioni consistono in ciò, che le tracce PQ, PR, QR del piano,

sono rispettivamente perpendicolari alle proiezioni corrispondenti CC', BB', AA' della retta in quistione, purchè nondimeno si tratti di *proiezioni ortogonali;* non essendo vero il teorema quando gli assi sono obbliqui.

Infatti, il piano che proietta la retta secondo CC' è per sua definizione perpendicolare ad XY; e lo è parimenti al piano PQR, poichè passa per la retta nello spazio: laonde quel piano proiettante è perpendicolare alla intersegazione PQ degli altri due; dal che segue che *questa traccia* PQ *taglia ad angolo retto la linea* CC' che è nel piano proiettante. Lo stesso è a dirsi parimente delle tracce e delle proiezioni sugli altri piani coordinati; ed inoltre la proposizione reciproca ha luogo egualmente: cioè, *se due delle proiezioni* BB′ *ed* AA′, per esempio, *sono perpendicolari alle tracce* PR *e* QR, *la retta nello spazio è perpendicolare al piano.* È da osservarsi infatti che i piani proiettanti che passano per BB' ed AA', sono necessariamente perpendicolari uno a PR, e l'altro a QR, e quindi ambidue al piano PQR che contiene queste rette, laonde l'intersezione di questi due piani proiettanti, che non è altro che la retta nello spazio, riesce anche perpendicolare al piano PQR.

Tuttavolta, per essere vera la reciproca, quando ci limitiamo ad esigere perpendicolari tra loro *due sole* proiezioni e le tracce corrispondenti, bisogna che i due piani proiettanti che si adoperano, fossero distinti l'uno dall'altro, senza di che le due proiezioni lascerebbero la retta indeterminata.

Così, a cagion d'esempio, quando le due tracce PR e QR sono parallele ad OZ, le proiezioni BB' ed AA' possono essere perpendicolari alla OZ, senza che la retta nello spazio si trovi perpendicolare al dato piano; essendochè allora i due piani proiettanti palesemente si confondono, e non bastano più a determinare la retta. Ma in tal caso non si dovrebbe che verificare se la terza proiezione CC' è anche perpendicolare alla traccia PQ.

47. Esprimiamo ora queste condizioni analiticamente, conservando i simboli adoperati nel n° 44. La traccia del piano dato su di XZ è rappresentata da

$$y=0 \text{ ed } Ax+Cz+D=0, \text{ ovvero } x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A};$$

e dovendo essere perpendicolare alla corrispondente proiezione $x=az+p$, risulta la relazione

$$(7) \qquad a=\frac{A}{C}.$$

La traccia su di YZ è data da

$$x=0, \text{ e } By+Cz+D=0, \text{ ovvero } y=-\frac{C}{B}z-\frac{D}{B},$$

ed affinchè fosse perpendicolare alla proiezione $y=bz+q$, importa che sia

$$(8) \qquad b=\frac{B}{C}.$$

Cosicchè le condizioni (7) ed (8) sono *necessarie* e *sufficienti* per esprimere che il piano è perpendicolare alla retta.

48. Tuttavolta l'ultima conseguenza ammette una eccezione nel caso particolare citato nel n° 46, pel quale si ha $C=0$; essendochè le formole (7) e (8) darebbero $a=\infty$ e $b=\infty$, il che riduce l'equazioni (2) e (3) della retta ad una sola della forma $z=h$, la quale è insufficiente a definirla. In tal caso conviene adoperare la terza proiezione, che sarà della forma,

$$y=mx+k, \text{ e porre } m=\frac{B}{A},$$

affin di esprimere che essa è anche perpendicolare alla traccia del piano proposto su di XY.

Per tal modo le condizioni *complete* dell'essere la retta perpendicolare al piano, saranno

$$(7) \quad a=\frac{A}{C}, \quad (8) \quad b=\frac{B}{C}, \quad (9) \quad m=\frac{B}{A}:$$

ma a meno che non si avesse ad operare direttamente su di un esempio numerico pel quale $C=0$, sarà bastevole nei calcoli generali far uso delle relazioni (7) ed (8), comprendendo queste implicitamente la relazione (9), essendochè pel n° 17 si ha

$$m=\frac{b}{a}.$$

49. *Trovare la distanza di un punto dato* (x',y',z') *da un piano rappresentato da*

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Se dal punto dato conduciamo una retta indefinita perpendicolare al piano, questa avrà per equazioni (n° 47)

$$(2) \quad x-x' = \frac{A}{C}(z-z'), \quad (3) \quad y-y' = \frac{B}{C}(z-z');$$

e le coordinate del piede della retta sul piano si otterranno riguardando le variabili x,y,z come aventi gli stessi valori nell'equazioni (1), (2), (3). I quali, dedotti, si dovranno sostituire nella formola che dà la distanza di due punti

$$\delta = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}:$$

onde giova preparare l'equazioni soprascritte in modo che racchiudano i binomi $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. A tal uopo scriviamo l'equazione (1) sotto la forma

$$(4) \quad A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + D' = 0,$$

ponendo per brevità $D' = Ax' + By' + Cz' + D$; e quindi sostituiti in (4) i valori di $x-x'$, $y-y'$, dedotti da (2) e (3), si troverà

$$z-z' = \frac{-D'C}{A^2+B^2+C^2}, \quad y-y' = \frac{-D'B}{A^2+B^2+C^2}, \quad x-x' = \frac{-D'A}{A^2+B^2+C^2},$$

e la distanza richiesta verrà espressa da

$$\delta = \frac{Ax'+By'+Cz'+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Il radicale che entra in questa espressione comporta due segni, di cui bisogna riguardare quello soltanto che rende la frazione totale *positiva;* essendochè ogni qualvolta trattasi di distanze che non sono contate parallelamente ad una linea fissa, non si tien conto che dei valori assoluti.

50. Allorquando il punto dato è all'origine degli assi, nella formola precedente si ha da porre $x'=0, y'=0, z'=0$; e deducesi così per *la distanza di un piano dall'origine delle coordinate*,

$$\delta' = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

formola in cui il radicale va similmente affetto dallo stesso segno di D.

51. *Calcolare la più corta distanza di un punto* (x',y',z') *da una retta rappresentata da*

$$(1)\qquad x=az+p\,,\quad (2)\quad y=bz+q.$$

A ciò fare, si potrebbe condurre pel dato punto un piano perpendicolare alla retta, del quale piano l'equazione sarebbe, dietro le relazioni trovate nei n[i] 43 e 47,

$$(3)\qquad a(x-x')+b(y-y')+z-z'=0\,;$$

e poscia combinando l'equazioni (1), (2), (3), si dedurrebbero i valori delle coordinate x,y,z del punto ove il piano incontra la retta. Ora la linea che congiunge questo punto con quello che ha per coordinate x', y', z', misura chiaramente la distanza cercata; laonde sostituendo quei valori nella formola generale $\delta''=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$, si otterrebbe questa distanza, che dopo varie riduzioni potrà scriversi alla maniera seguente:

$$\delta''=\sqrt{(x'-p)^2+(y'-q)^2+z'^2-\frac{H^2}{a^2+b^2+1}}\,,$$

ove per brevità si è posto $H=a(x'-p)+b(y'-q)+z'$.

52. Ma si perviene a questo risultamento in un modo più semplice e più elegante, immaginando il triangolo $M'MT$ (*fig.* 7) formato dalla retta data MT, dalla perpendicolare $M'M$ abbassata dal punto dato M', e dalla linea che congiunge M' colla traccia T della retta sul piano XY, traccia che ha per coordinate $z=0$, $x=p$, $y=q$. Di fatti questo triangolo rettangolo dà

$$MM'=\sqrt{\overline{TM'}^2-\overline{TM}^2}\;:$$

ora si ha ad evidenza

$$\overline{TM'}^2=(x'-p)^2+(y'-q)^2+z'^2,\ \text{e}$$

$$TM=TM'\cos(MTM')=TM'(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'),$$

chiamando α,β,γ, gli angoli di TM cogli assi, ed α',β',γ' quelli di TM' (n° 34). È noto d'altronde (n° 29) che

$$\cos\alpha'=\frac{x'-p}{TM'}\,,\ \cos\beta'=\frac{y'-q}{TM'}\,,\ \cos\gamma'=\frac{z'}{TM'}\,;$$

laonde risulta

$$TM=(x'-p)\cos\alpha+(y'-q)\cos\beta+z'\cos\gamma,$$

e sostituito nel valore di MM', risulta la cercata distanza sotto la forma

$$\sqrt{(x'-p)^2+(y'-q)^2+z'^2-[(x'-p)\cos\alpha+(y'-q)\cos\beta+z'\cos\gamma]^2},$$

la quale riuscirebbe identica all'espressione trovata per δ'', ove quivi si ponessero i noti valori

$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

53. *Trovare l'angolo di una retta con un piano*, rappresentati dalle rispettive equazioni

$$(R)\qquad x=az+p,\ y=bz+q,$$

$$(P)\qquad Ax+Bz+Cz+D=0.$$

Questa inclinazione sarebbe indeterminata, se non si convenisse d'intendere per ciò *l'angolo compreso tra la retta* (R) *e la sua proiezione* ortogonale *sul piano* (P); e questa scelta è fondata sull'essere questo angolo il minimo tra quelli che la retta (R) forma colle diverse linee segnate nel piano dal suo piede, come dimostrasi agevolmente nella geometria.

Seguita da questa definizione, che se da un punto della retta (R) si abbassa sul piano una *normale* (N), l'angolo di queste due ultime rette sarà il *complemento* di quello che si cerca.

Ora, qualunque siasi il punto donde menasi la normale, l'equazioni di questa avranno la forma

$$(N)\qquad x=a'z+p',\ y=b'z+q',$$

colle relazioni $a'=\frac{A}{C}$, $b'=\frac{B}{C}$: e stante che, pel n° 32, si ha per determinare l'angolo delle due rette (R) ed (N),

$$\cos(R,N)=\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

fatta la sostituzione dei valori precedenti di a' e b', deducesi il seno dell'angolo del piano colla retta, cioè:

$$\text{sen}(R,P)=\frac{Aa+Bb+C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

54. Paragoniamo ora i piani tra loro, e cerchiamo primieramente *le condizioni che esprimono che due piani sono paralleli*. Siano

$$(P) \qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$(P') \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

l'equazioni di questi piani. Sarà necessario e sufficiente che le loro tracce su ciascuno dei piani coordinati si trovino rispettivamente parallele. Se dunque facciasi nell'equazioni (P) e (P') successivamente $x=0$, $y=0$, $z=0$, si rinverranno le condizioni

$$\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}, \frac{C}{A}=\frac{C'}{A'}, \frac{A}{B}=\frac{A'}{B'},$$

le quali si riducono a queste due

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}:$$

il che vuol dire *che i coefficienti de' termini variabili debbono essere rispettivamente proporzionali* nelle due equazioni; ed anche si potranno sempre rendere rispettivamente *eguali questi tre coefficienti*, dividendo il termine costante D' pel fattore comune che distinguerà A', B', C' da A, B, C.

55. *Trovare l'angolo dei due piani* assegnati dall'equazioni soprascritte (P) e (P'), *(fig. 8)*. Se concepiscasi la figura 8 eseguita su di un piano di proiezione perpendicolare ai due piani proposti, questi verranno rappresentati dalle loro tracce AP, AP'; e l'angolo PAP' misurerà palesemente l'inclinazione di questi piani. Ma se conduconsi ad essi due *normali* per lo punto A, è agevole scorgere che l'angolo $NAN'=PAP'$; e come d'altronde queste rette prolungate indefinitamente, formano al pari dei piani quattro angoli supplementari a due a due, può dirsi generalmente che queste due normali comprendono tra loro gli stessi angoli dei piani proposti; e ciò sarà ancor vero per due altre rette parallele ad AN, AN', condotte per un punto dello spazio tolto ad arbitrio. Ciò posto, menando per l'origine due perpendicolari ai piani (P) e (P'), esse avranno per equazioni

$$(N) \quad x = az, y = bz \text{ colle condizioni } a=\frac{A}{C}, b=\frac{B}{C},$$

$$(N') \quad x = a'z, y = b'z \;\ldots\ldots\ldots\; a'=\frac{A'}{C'}, b'=\frac{B'}{C'},$$

e gli angoli di queste due normali saranno determinati (n° 32) dalla formola

$$\cos(N,N')=\frac{aa'+bb'+1}{\pm\sqrt{a^2+b^2+1}\;\sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

dunque sostituendo in questa i valori di a, a', b,b', si avrà per gli angoli dei due piani

$$\cos(P,P')=\frac{AA'+BB'+CC'}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}\;\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}:$$

formola, in cui il doppio segno che precede il secondo membro, corrisponde agli angoli acuti ed ottusi che comprendono i due piani indefiniti.

56. *Per calcolare gli angoli che fa un piano* (*P*) *coi piani coordinati*, basta esprimere nella formola precedente che il secondo piano (P'), arbitrario, viene a coincidere con uno di questi. Ora, perchè il piano (P') divenisse il piano XY, è chiaro che bisogna porre nella sua equazione $A'=0$, $B'=0$, e $D'=0$; laonde si ha per l'angolo del piano (P) col piano XY,

$$\cos(P,xy)=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(N,z);$$

in maniera consimile si troverebbe

$$\cos(P,xz)=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(N,y),$$

$$\cos(P,yz)=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\cos(N,x).$$

Questi tre angoli del piano (P) coi piani coordinati, sono palesemente gli stessi che quelli della normale (N) coi tre assi; talchè facendo la somma de' loro quadrati si trova, come nel n° 31, la relazione

$$\cos^2(P,xy)+\cos^2(P,xz)+\cos^2(P,yz)=1.$$

57. Gli angoli del piano (P) coi piani coordinati lasciano sempre un'ambiguità, che non può scomparire se non che sostituendo ad esso piano, supposto prima trasportato parallelamente a se stesso fino all'origine degli assi, una *normale* condotta per questo punto, e *prolungata verso una sola delle facce* del piano. Gli angoli di questa normale cogli *assi positivi* sono così compiutamente determinati, poi-

chè nelle formole del n° 56, bisognerà assumere *il radicale col segno medesimo del coefficiente* C, allorquando la normale anzidetta forma *un angolo acuto* colla OZ, e *col segno contrario* quando l'angolo è *ottuso*.

Circa al modo di definire la *faccia* del piano, sulla quale vuolsi innalzare la normale, ogni problema in particolare ne deve fornire i mezzi; così a cagion di esempio, nelle quistioni di Meccanica, ove esistono forze tendenti a far girare il loro raggio vettore attorno l'origine, puossi convenire di elevar la normale in modo che lo spettatore, situato su di essa ed in piedi sul piano, vegga il movimento di rotazione eseguirsi sempre *dalla sua sinistra alla destra*. Potrebbe adottarsi l'ipotesi inversa; ma la prima offre il vantaggio che quando la normale così determinata forma angoli acuti coi semiassi positivi disposti secondo l'uso ordinario, la proiezione del raggio vettore sui piani coordinati si muoverà nell'ordine alfabetico delle lettere, cioè: da OX verso OY, da OY verso OZ, e da OZ verso OX.

Parimente, per misurare senza ambiguità l'angolo dei due piani (P) e (P'), bisognerà prendere *l'angolo compreso tra due normali* dirette per rispetto a ciascuno di questi piani, come abbiamo indicato per un solo.

58. L'equazione del piano prende una forma notabile, ed utile ad essere qualche volta adoperata, allorquando vi s'introducono la perpendicolare δ abbassata dall'origine su di questo piano, e gli angoli λ,μ,ν, che questa *normale finita* forma coi semiassi positivi OX, OY, OZ. Per abbreviare la discussione, ammettiamo che nell'equazione

$$(P) \qquad Ax+By+Cz+D=0,$$

si sia avuto cura di rendere negativo nel primo membro il termine D; nel qual caso la perpendicolare abbassata dalla origine (n° 50), dovrà scriversi così

$$\delta=\frac{D}{-\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

e gli angoli λ,μ,ν, saranno dati (n° 56) dalle formole

$$\cos\lambda=\frac{A}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\mu=\frac{B}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{C}{+\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

essendochè, preparato in tal modo il termine D, dico doversi prendere qui tutt' i radicali coi *segni positivi*. Di fatti il piano proposto taglia gli assi coordinati a distanze

$$x'=\frac{-D}{A},\ y'=\frac{-D}{B},\ z'=\frac{-D}{C},$$

le quali avranno palesemente i *medesimi segni* di A,B,C: ora quando la distanza x' è positiva, è facile scorgere che l'angolo λ della *normale finita* δ riesce acuto, e perciò $\cos\lambda$ dovrà essere positivo; ma in tal caso è $A>0$, dunque nell'espressione di questo coseno fa d'uopo assumere il radicale col segno $+$. Se per lo contrario la distanza x' fosse negativa, l'angolo λ sarebbe necessariamente ottuso; e siccome allora sarebbe $A<0$, così bisogna benanche prendere il radicale positivamente. Applicandosi agli altri angoli una simigliante discussione, ne risulta doversi i coseni scrivere nel modo detto di sopra; d'onde deduconsi i valori

$$A=\frac{-D}{\delta}\cos\lambda,\ B=\frac{-D}{\delta}\cos\mu,\ C=\frac{-D}{\delta}\cos\nu,$$

che sostituiti nell'equazione (P), si ha per l'equazione del piano

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=+\delta.$$

Sotto questa forma, il secondo membro δ sarà sempre una quantità essenzialmente positiva, ed i soli coseni potranno avere segni diversi secondo la posizione del piano, o piuttosto della normale δ relativamente ai semiassi delle coordinate.

59. *Condizione perchè due piani siano perpendicolari tra loro*. In tal caso, è necessario e sufficiente che il valore trovato nel n° 55 pel coseno dell'angolo dei due piani divenisse nullo; per lo che si ha la relazione

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

60. *Determinare l'intersecazione dei due piani rappresentati dall'equazioni*

$$(P)\quad Ax+By+Cz+D=0,$$
$$(P')\quad A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Dopo le riflessioni fatte nel n° 13, sarebbe bastevole il dire che la retta richiesta è sufficientemente determinata dal si-

stema dell'equazioni (P) e (P') prese *simultaneamente*, vale a dire riguardandovi x,y,z come aventi i medesimi valori nel tempo stesso. Difatti, sotto questo punto di veduta non rimane che una di queste variabili da potersi assumere ad arbitrio; per modo che se si pone successivamente $z=1,2,3,4,\ldots 9$, e si calcolino per via dell'equazioni (P) e (P') i valori corrispondenti di x e di y, verranno determinati quanti punti si vogliono dell' intersecazione dei due piani. Ma se bramansi conoscere le proiezioni di questa retta, è a rammentarsi (nⁱ 3 e 17) che le variabili x e z, a cagion d'esempio, rappresentano nel tempo stesso le coordinate di un punto dell' intersecazione nello spazio, e quelle della proiezione di esso punto sul piano XZ; laonde l'equazione di questa proiezione si ottiene eliminando y tra (P) e (P'). Il medesimo ragionamento mostra che basterà eliminare x per avere la proiezione su di YZ; per modo che senza sviluppare qui i calcoli, si perverrà palesemente a due equazioni della forma

$$(1) \qquad x=az+p\ , \quad (2) \qquad y=bz+q.$$

Se queste ultime sono più acconce a rappresentare il luogo dell'intersezione, è perchè esse appartengono (n° 15) a due piani che passano per questa retta, ed hanno il vantaggio di trovarsi perpendicolari l'uno ad XZ, e l'altro ad YZ; ma non bisogna esser meno persuasi che l'equazioni (P) e (P') sotto la loro forma attuale, e considerate ad un tempo, determinano già completamente la retta richiesta del pari che (1) e (2).

61. Per simiglianti ragioni, si comprende che la curva d'intersezione di due superficie rappresentate da

$$F(x,y,z)=0,\ F'(x,y,z)=0,$$

è compiutamente determinata così dal sistema di queste due equazioni, prese *simultaneamente*, che dall'equazioni delle sue proiezioni

$$x=\varphi(z)\ ,\ y=\psi(z),$$

dedotte dalle precedenti, con eliminare successivamente y ed x: le quali equazioni inoltre rappresentano due superficie, cioè due cilindri paralleli ad OY ed OX (n° 8).

Metteremo termine a questo capitolo con un problema che somministra l'occasione di poter applicare diverse formole ottenute fin qui.

62. *Trovare la grandezza e la posizione della più corta distanza di due rette*, che si suppongono non essere in un medesimo piano, ed avere per equazioni

$$(L) \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q,$$
$$(L') \qquad x = a'z + p', \qquad y = b'z + q'.$$

Per risolvere la prima parte di questo problema, immaginiamo per la retta (L) un piano (P) parallelo ad (L'), il che è sempre possibile, poichè basta far passare questo piano per la prima retta e per un'altra condotta da un punto di essa parallelamente alla seconda; ma per esprimere analiticamente queste condizioni, noi ci faremo ad adoperare un mezzo più semplice. Immaginiamo anche per la retta (L') un piano (P') parallelo ad (L): questi due piani saranno di necessità paralleli tra loro, e la loro distanza misurerà evidentemente la *grandezza* della minima distanza delle due rette proposte.

Ora il piano (P) avrà una equazione, che per semplificare i calcoli, si potrà scrivere sotto la forma

$$(P) \qquad Ax + By + z + D = 0;$$

ma poichè esso è parallelo alla retta (L'), e contiene la retta (L), risultano (n[i] 44 e 45) le condizioni

$$(1) \qquad Aa' + Bb' + 1 = 0,$$
$$(2) \qquad Aa + Bb + 1 = 0, \quad (3) \quad Ap + Bq + D = 0,$$

di cui le due prime danno

$$A = \frac{b - b'}{ab' - a'b}, \; B = \frac{a' - a}{ab' - a'b},$$

e la terza determinerà D con sostituirvi questi valori.

Parimenti il piano (P') avrà per equazione

$$(P') \qquad A'x + B'y + z + D' = 0,$$

colle condizioni

$$(4) \quad A'a + B'b + 1 = 0,$$
$$(5) \quad A'a' + B'b' + 1 = 0, \quad (6) \quad A'p' + B'q' + D' = 0;$$

e senza risolvere l'equazioni (4) e (5), paragonandole con (2) ed (1), si scorge ch'esse conducono ad $A' = A$, $B' = B$, come dovea risultare, per essere i piani (P) e (P') necessariamente paralleli; e quanto al valore di D', esso si trae da (6).

Ciò posto, abbassiamo dall'origine due perpendicolari δ e δ' su questi piani paralleli; esse saranno espresse (n° 50) da

$$\delta = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+1}}, \ \delta' = \frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+1}};$$

e la loro differenza $\delta' - \delta$ o pure $\delta - \delta'$ misurerà l'intervallo dei due piani, ovvero la minima distanza δ'' delle rette proposte. Adunque sostituendovi i valori di D e D', tratti da (3) e (6), indi quelli di A e B, risulterà

$$\delta'' = \frac{A(p-p')+B(q-q')}{\sqrt{A^2+B^2+1}} = \frac{(p-p')(b-b')-(q-q')(a-a')}{\sqrt{(a-a')^2+(b-b')^2+(ab'-a'b)^2}} \cdot (7)$$

63. Importa l'osservare che ad ottenersi la vera grandezza di δ'' in tutti i casi, bisogna primieramente assumere i numeratori D e D' coi segni che li affettano, e quindi calcolare *sempre* la loro differenza *analitica*. Di fatti, siccome i due piani (P) e (P') tagliano l'asse OZ a distanze $z = -D, z' = -D'$, se i termini D e D' sono dello stesso segno, questi piani paralleli si rattroveranno da un medesimo lato per rispetto all'origine degli assi, ed in tal caso la loro distanza eguaglierà la differenza delle grandezze *assolute* delle perpendicolari δ' e δ, vale a dire che sarà data da

$$\frac{\pm(D'-D)}{\sqrt{A^2+B^2+1}}.$$

Per lo contrario, allorquando D' e D sono di segni opposti, l'origine delle coordinate è situata tra i due piani, ed allora la vera distanza δ'' riesce somma dei valori *assoluti* delle perpendicolari δ, δ'; e questa somma equivale ancora alla differenza analitica

$$\frac{\pm(D'-D)}{\sqrt{A^2+B^2+1}}.$$

Adunque in tutt'i casi la regola enunziata dinanzi è giusta; e soltanto nel valore definitivo di δ'', bisognerà rendere il risultamento *positivo*, dando al radicale lo stesso segno che avrà il numeratore.

64. Si può nella formola (7) introdurre l'angolo θ, che fanno tra loro le due rette proposte, e gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, ch'esse formano cogli assi. Infatti, giusta l'ultima

formola del n° 32, il valore di δ'' può essere scritto così

$$\delta''=\frac{(p-p')(b-b')-(q-q')(a-a')}{\operatorname{sen}\theta.\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}};$$

e se quivi si sostituiscono i valori trovati nel n° 30,

$$a=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\ b=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma},\ a'=\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'},\ b'=\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'},$$

otterrassi

$$(8)\ \delta''=\frac{(p-p')(\cos\beta\cos\gamma'-\cos\beta'\cos\gamma)+(q-q')(\cos\gamma\cos\alpha'-\cos\gamma'\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}.$$

65. Circa la seconda parte del problema, la quale consiste a trovare la posizione della retta (L''), sulla quale misurasi la minima distanza delle rette proposte, basta notare che questa retta (L'') dovendo essere perpendicolare nel tempo stesso ad (L) ed (L'), sarà data dalla intersezione di due piani (P'') e (P''') condotti l'uno per (L), e l'altro per (L'), ed amendue perpendicolari a (P). Ora questi novelli piani saranno determinati dall'equazioni

$(P'')\ A''x+B''y+z+D''=0,$	$(P''')\ A'''x+B'''y+z+D'''=0,$
$A''A+B''B+1=0,$	$A'''A+B'''B+1=0,$
$A''a+B''b+1=0,$	$A'''a'+B'''b'+1=0,$
$A''p+B''q+D''=0,$	$A'''p'+B'''q'+D'''=0.$

Dunque la retta richiesta (L'') si troverà rappresentata analiticamente dal sistema dell'equazioni (P'') e (P'''), prese simultaneamente, le quali divengono, eseguito il calcolo dei coefficienti,

$$(x-p)[a-a'+b(ab'-a'b)]+(y-q)[b-b'+a(a'b-ab')]$$
$$=z[a(a-a')+b(b-b')],$$
$$(x-p')[a'-a+b'(a'b-ab')]+(y-q')[b'-b+a'(ab'-a'b)]$$
$$=z[a'(a'-a)+b'(b'-b)].$$

66. Osserviamo da ultimo che se le due rette (L) ed (L') si tagliassero, il numeratore della formola (7) diverrebbe nullo conforme alla condizione (5) del n° 25, ed allora si troverebbe $\delta''=0$, com'era a prevedersi; ma se queste rette fossero parallele, si avrebbe $\delta''=\frac{0}{0}$, benchè la loro distanza da per tutto sia costante. Questo risultamento deriva dacchè i piani (P) e (P') divengono in tal caso indeterminati, come

ce ne potremo convincere risalendo alle condizioni che avevano servite a definirle, oppure osservando che l'equazioni (1) e (2) del n° 62 si riducono ad una sola. Per applicare intanto a questo caso il medesimo andamento, basterebbe esprimere che i piani (P) e (P') sono condotti *perpendicolari al piano che contiene le due linee parallele*, ma sarà più breve il cercare la perpendicolare abbassata da un punto di (L') su di (L). Prendendo infatti per questo punto la traccia che vien data da $z=0$, $x=p'$, $y=q'$, la formola del n° 51 somministra per la distanza delle due rette parallele,

$$\delta''^2=(p'-p)^2+(q'-q)^2-\frac{[a(p'-p)+b(q'-q)]^2}{1+a^2+b^2},$$

ovvero

$$\delta''^2=(p'-p)^2+(q'-q)^2-[(p'-p)\cos\alpha+(q'-q)\cos\beta]^2.$$

CAPITOLO IV.

TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE, E TEOREMI SULLE PROIEZIONI DELLE RETTE E DELLE SUPERFICIE PIANE.



67. Allorquando una *retta finita* AB ed una retta indefinita OX (*fig.* 9) si trovano o no in un medesimo piano, e dalle estremità della prima si abbassano sull'altra le perpendicolari AA' e BB' che, in generale, non sono parallele, la parte intercetta $A'B'$ si denomina la *proiezione* di AB, e queste rette hanno tra loro una notevole relazione. Difatti, se per lo punto B si concepisce un piano MBB' perpendicolare ad OX, e menasi fino all' incontro di esso la retta AC parallela ad OX, il triangolo ACB sarà rettangolo in C, e l'angolo $BAC=\alpha$ sarà quello che dicesi l'angolo di AB con OX. Ma questo triangolo dà $AC=AB.\cos\alpha$, ovvero $A'B'=AB.\cos\alpha$: dunque *la proiezione di una retta su di un' altra eguaglia la retta primitiva moltiplicata pel coseno dell' angolo* ACUTO *che esse fanno tra loro* (1).

(1) Si può anche affermare che *la proiezione di una retta nello spazio su di un piano qualunque, eguaglia la retta primitiva moltiplicata pel coseno dell' angolo d' inclinazione di questa retta al pia-*

68. Lo stesso teorema sussiste per ***una superficie piana proiettata su di un piano*** qualunque; ma cominciamo dal considerare un triangolo ACB (*fig. 10*), di cui uno dei lati BC è parallelo al piano sul quale vuolsi proiettare la figura: allora è chiaro potersi supporre questo piano di proiezione passare pel lato stesso BC, e rappresentare con $A'BC$ la proiezione del triangolo primitivo. Ciò posto, conducendo per la retta AA' un piano secante perpendicolare a BC, esso taglierà i due triangoli secondo le rette AH ed $A'H$ che ne saranno le *altezze*, e che comprenderanno tra loro l'angolo α eguale a quello che formano i piani di questi triangoli. Ora si ha chiaramente

$$ABC : A'BC :: AH : A'H :: 1 : \cos\alpha;$$

d'onde deducesi $\quad A'BC = ABC \times \cos\alpha.$

Se il triangolo ABC (*fig.* 11) non ha alcuno dei suoi lati parallelo al piano di proiezione, si concepisca questo piano condotto per l'angolo inferiore B, e sia $A'BC'$ la proiezione di ABC. Prolungando le linee fino all'incontro del piano, si formeranno due triangoli ADB e CDB, pei quali il teorema è dimostrato; talchè si avrà

$$A'DB = ADB \times \cos\alpha, \quad C'DB = CDB \times \cos\alpha;$$

e quindi sottraendo l'un membro dall'altro, risulterà ancora

$$A'C'B = ACB \times \cos\alpha.$$

69. Sia ora P un poligono *piano*, e P' la sua proiezione su di un piano fisso. Se decompongasi il primo in triangoli $T_1, T_2, T_3, \ldots$ le cui proiezioni siano $T'_1, T'_2, T'_3, \ldots$ il poligono P sarà la somma degli uni, e P' la somma degli altri; ma essendochè per ciascuno di questi triangoli è

$$T'_1 = T_1 \cos\alpha, \quad T'_2 = T_2 \cos\alpha, \ldots;$$

sommando membro a membro, emergerà

$$P' = P\cos\alpha,$$

formola la quale dimostra *che la proiezione di un'area*

---

no: e ciò, indipendentemente da questo n°, si rileva dalla *fig.* 2, in cui la retta $M''M'$ sta ad $M''P$, che ne eguaglia la proiezione $C''C'$ sul piano XY, come l'unità al coseno dell'angolo $M'M''P$, cioè dell'angolo acuto che dicesi (53) inclinazione della retta al piano.

piana su di un piano qualunque, è eguale all'area primitiva moltiplicata pel coseno dell'angolo ACUTO *che i due piani formano tra loro.*

70. Dopo ciò è facile estendere, *per via del metodo dei limiti*, la stessa proposizione al caso di *un'area piana* S terminata da *una linea curva* o *mista;* giacchè inscrivendovi un poligono P, ed indicando con S' e P' le proiezioni di queste due superficie sul piano fisso, scorgesi che a misura che si moltiplicano i lati del poligono, le due quantità costanti S' ed $S\cos\alpha$ saranno *i limiti* delle due quantità variabili P' e $P\cos\alpha$; ora essendo queste sempre eguali tra loro per la formola precedente, si conchiude che i loro limiti sono anche eguali, vale a dire che $S' = S\cos\alpha$.

Così un cerchio il cui raggio è eguale ad a, essendo proiettato su di un piano darà un'ellisse, la cui area vien espressa da $E = \pi a^2 . \cos\alpha$; ma egli è evidente che i due semiassi di questa ellisse saranno a, e $b = a\cos\alpha$; laonde l'area diverrà $E = \pi ab$: risultamento già noto per altra via.

71. Se si proietta la *superficie piana* P su di tre piani rettangolari, coi quali forma gli angoli dinotati da α, β, γ, si avranno per le tre proiezioni P', P'', P''' di questa superficie,

$$P' = P\cos\alpha, \quad P'' = P\cos\beta, \quad P''' = P\cos\gamma;$$

quindi, fattane la somma dei quadrati, e rammentandosi essere (n° 56) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, ne risulterà questa notabilissima relazione

$$P'^2 + P''^2 + P'''^2 = P^2 \text{ (1)}.$$

---

(1) In virtù di questa relazione, se un angolo solido di una piramide triangolare si supponga formato da tre angoli retti, il quadrato della faccia opposta a tale angolo (s'intende, com'è naturale, del numero che ne misura la superficie) sarà eguale alla somma dei quadrati delle facce che lo comprendono: relazione affatto simile alla notissima tra l'ipotenusa ed i cateti di un triangolo rettangolo.

Di più, tornando alla formola

$$\overline{M'M''}^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2,$$

dimostrata nel n° 6, *fig.* 2, ed osservando che $x'-x''$ esprime la proiezione $D'D''$ della retta $M'M''$ sull'asse OX, e che $y'-y''$, $z'-z''$ esprimerebbero similmente le proiezioni di $M'M''$ sugli assi OY, OZ, si rende anche palese che *il quadrato di una retta esistente nello spa-*

72. Facciamoci ora alla trasformazione delle coordinate rettilinee, e supponiamo che si tratti *di passare da un sistema di assi rettangolari* OX,OY,OZ, (*fig.* 12), *ad un sistema di assi obbliqui* OX', OY', OZ', *aventi la medesima origine* dei primi. Se da un punto qualsivoglia M dello spazio conduciamo le rette MP, MP', rispettivamente parallele ad OZ, OZ', e terminate ai punti P, P', ove esse incontrano una il piano XY, l'altra il piano $X'Y'$; e poscia da questi punti tiriamo $PQ, P'Q'$ parallele ad OY, OY', avremo per le coordinate di M nei due sistemi,

$$x = OQ, \quad y = PQ, \quad z = MP,$$
$$x' = OQ', \quad y' = P'Q', \quad z' = MP',$$

e la quistione riducesi a trovare i valori delle une in funzione delle altre. Per ciò fare proiettiamo la linea spezzata $x'+y'+z'$ sull'asse OX, abbassando da ciascuno dei suoi angoli le perpendicolari $Q'G, P'H, MQ$; l'ultima delle quali essendo di necessità nel piano MPQ, metterà capo precisamente all'estremo dell'ascissa $x = OQ$, e si avrà

$$(1) \qquad x = OQ = OG + GH + HQ;$$

ma pel teorema del n° 67 si ottiene

$$OG = x'\cos(x',x), \quad GH = y'\cos(y',x), \quad HQ = z'\cos(z',x),$$

indicando sempre con questi simboli ed altri simiglianti gli angoli compresi *tra due semiassi positivi;* laonde sostituendo, risulterà

$$(2) \qquad x = x'\cos(x',x) + y'\cos(y',x) + z'\cos(z',x).$$

In verità la costruzione sembra supporre che gli assi OX', OY', OZ', formino tutti angoli acuti con OX; nondimeno se

---

zio eguaglia la somma dei quadrati delle sue proiezioni su tre assi rettangolari qualunque.

Finalmente, osservando che le tre formole

$$(x'-x'')^2+(y'-y'')^2,$$
$$(x'-x'')^2+(z'-z'')^2,$$
$$(y'-y'')^2+(z'-z'')^2,$$

esprimono rispettivamente i quadrati della retta $C'C''$, che è la proiezione di $M'M''$ sul piano XY, e dell'altre due proiezioni di $M'M''$ sui piani XZ ed YZ, la somma di esse formole renderà manifesto che *il quadrato di una retta esistente nello spazio pareggia la semisomma dei quadrati delle sue proiezioni su tre piani rettangolari qualunque.*

uno di essi, per esempio OY', formasse angolo ottuso, allora nella figura ch'è facile a costruire, il punto H cadrebbe a sinistra di G, e avrebbesi in luogo di (1) questa equazione

$$(3) \qquad x=OG-GH+HQ,$$

colla quale accordasi ancora l'equazione generale (2), poichè dietro l'ipotesi di $Y'OX>90°$, il termine $y'\cos(y',x)$ sarà anche *negativo*, e sempre eguale *numericamente* alla proiezione GH dell'ordinata $P'Q'=y'$.

D'altra parte, se lasciando l'angolo $Y'OX$ acuto, accadesse che il punto M avesse la sua ordinata y' negativa, il punto H cadrebbe anche a sinistra di G, e l'equazione (3) terrebbe luogo ancora dell'altra (1); il che prova che per rendere la formola (2) applicabile in tutt'i casi, fa d'uopo tener conto *dei segni delle coordinate e dei segni dei coseni*, rapportando sempre questi coseni agli angoli compresi *tra i semiassi positivi*. Proiettando inoltre la medesima linea spezzata $x'+y'+z'$ su di OY e su di OZ, si avrebbero di necessità risultamenti consimili; laonde possiamo affermare *che ogni coordinata rettangolare è eguale alla somma algebrica delle proiezioni delle tre novelle coordinate su ciascuno degli antichi assi*, e stabilire le tre formole generali seguenti:

$$(4)\begin{cases} x=x'\cos(x',x)+y'\cos(y',x)+z'\cos(z',x)=a\,x'+b\;y'+c\;z', \\ y=x'\cos(x',y)+y'\cos(y',y)+z'\cos(z',y)=a'\,x'+b'\,y'+c'\,z', \\ z=x'\cos(x',z)+y'\cos(y',z)+z'\cos(z',z)=a''x'+b''y'+c''z'. \end{cases}$$

Importa tuttavia l'osservare che le *nove* costanti che entrano in queste formole, non possono tutte ricevere valori arbitrari. Di fatti a,a',a'', per esempio, indicando i coseni degli angoli che una stessa retta OX' forma coi tre assi rettangolari OX,OY,OZ, debbono andar sommessi alla condizione citata nel n° 31: e lo stesso ha luogo per b,b',b'', e per c,c',c''. Per conseguenza bisognerà sempre alle formole (4) aggiungere le tre relazioni seguenti:

$$(5) \quad a^2+a'^2+a''^2=1,\quad b^2+b'^2+b''^2=1,\quad c^2+c'^2+c''^2=1,$$

il che non lascia che *sei* costanti delle quali possa disporsi ad arbitrio (1).

73. *Passare da un sistema di assi rettangolari ad un altro sistema di assi anche rettangolari.*

Basterà adoperare le formole precedenti (4) e (5), aggiungendovi novelle condizioni atte ad esprimere che gli assi OX',

OY', OZ' sono anche perpendicolari tra loro. Ora per la formola (12) del n° 34 si ha in tutt' i casi

$$\cos(x',y') = \cos(x',x)\cos(y',x) + \cos(x',y)\cos(y',y) + \cos(x',z)\cos(y',z)$$
$$= ab + a'b' + a''b'',$$
$$\cos(x',z') = ac + a'c' + a''c'',$$
$$\cos(y',z') = bc + b'c' + b''c''.$$

Per esprimere adunque che gli angoli dei novelli assi son retti, è necessario e sufficiente di porre le condizioni

$$(6)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ ac + a'c' + a''c'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0; \end{cases}$$

per modo che la soluzione dell' attuale problema è fornita dalle formole (4), (5) e (6); ma siccome ciò stabilisce sei relazioni tra le nove costanti, così *non ne resteranno più che* TRE *delle quali si possa disporre ad arbitrio* per modificare l' equazione di una data superficie, finchè gli assi resteranno perpendicolari tra loro.

74. Nel caso di *due sistemi rettangolari* si ha talvolta bisogno di risolvere le formole (4) per rapporto ad x', y', z'; e per ciò fare basta sommarle, 1° dopo aver moltiplicata la prima per a, la seconda per a' e la terza per a'': 2.° dopo averle moltiplicate rispettivamente per b, b', b'': 3.° per c, c', c''; poichè queste tre operazioni, avendo riguardo alle relazioni (5) e (6) danno le formole

$$(7)\quad \begin{cases} ax + a'y + a''z = x' \\ bx + b'y + b''z = y', \\ cx + c'y + c''z = z'. \end{cases}$$

Si potrebbero d' altronde stabilire direttamente queste formole, riguardando x', y', z' come le coordinate *primitive* rettangolari, e rammentandosi che ciascuna di esse (n° 72) *eguaglia la somma algebrica delle proiezioni delle tre coordinate* x, y, z sui diversi assi OX', OY', OZ'. Sotto questo punto di veduta, si comprende dover esistere tra le costanti le sei relazioni

$$(8)\quad a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$

$$(9)\quad aa' + bb' + cc' = 0, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0,$$

che debbono riguardarsi come al tutto equivalenti alle con-

dizioni (5) e (6); giacchè sì le une che le altre non fanno che esprimere, con un ordine differente, essere tutti retti i sei angoli XOY, XOZ, YOZ, ed $X'OY'$, $X'OZ'$, $Y'OZ'$.

75. L'equazioni (7), relative a due sistemi di assi rettangolari, manifestano una notevole proprietà che presenta la proiezione di una retta su di un'altra. Di fatti, è da notare come nel n° 72, che il raggio vettore OM (*fig.* 12), proiettato perpendicolarmente su di OX', che si considera come una linea qualunque, riducesi alla coordinata $OQ'=x'$; ma le proiezioni di questo medesimo raggio vettore sui tre assi rettangolari OX, OY, OZ sono rispettivamente (n° 72) le coordinate x,y,z; e dappoichè si ha in virtù della prima dell'equazioni (7)

$$x' = x\cos(x,x') + y\cos(y,x') + z\cos(z,x'),$$

ne risulta che *per proiettare una retta* OM=r *su di una retta qualunque* OX', *si può dapprima proiettare* r *su tre assi rettangolari, quindi proiettare di nuovo queste prime proiezioni su di* OX', *e fare poscia la somma analitica dei risultati.* Questo è d'altronde ciò a cui si perviene direttamente, osservando che la proiezione richiesta è uguale ad $r\cos(r,x')$, ovvero, dietro la formola (12) del n° 34, eguale ad

$$r\,[\cos(r,x)\cos(x',x)+\cos(r,y)\cos(x',y)+\cos(r,z)\cos(x',z)]:$$

ora i prodotti $r\cos(r,x)$, $r\cos(r,y)$, $r\cos(r,z)$, non sono altra cosa che le proiezioni di r sui tre assi rettangolari; e questi prodotti trovandosi moltiplicati pei secondi coseni, divengono le proiezioni su di OX' delle tre prime proiezioni.

76. Ci è ora facile esprimere *la distanza di due punti in funzione delle loro coordinate oblique.* Cominciamo dalla distanza OM dell'origine degli assi da un punto M (*fig.* 12) le cui coordinate rettangolari sono x, y, z, e le coordinate obblique x', y', z'. Avremo primieramente (n° 6)

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

ma se quivi si sostituiranno i valori di x,y,z dati dall'equazioni (4), e terremo presente (n° 73) che per assi qualunque si ha sempre

$$ab + a'b' + a''b'' = \cos(x',\ y'),$$
$$ac + a'c' + a''c'' = \cos(x',\ z'),$$
$$bc + b'c' + b''c'' = \cos(y',\ z'),$$

risulterà

(10) $\overline{OM}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y'\cos(x',y') + 2x'z'\cos(x',z') + 2y'z'\cos(y',z')$.

77. Osserviamo qui che il raggio vettore OM è la diagonale di *un parallelepipedo obbliquo*, che avrebbe per lati contigui x', y', z'; per conseguenza la formola (10) fa *conoscere la lunghezza della diagonale* di questo solido *in funzione dei lati, e degli angoli compresi tra essi.*

78. Siano ora M' ed M'' due punti che abbiano per coordinate *obblique* x', y', z', ed x'', y'', z''. Se per questi due punti conducansi sei piani rispettivamente paralleli ai piani coordinati obbliqui, è chiaro che si costruirà un parallelepipedo, di cui la retta $M'M''$ è la diagonale, ed $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$ i tre lati contigui.

Per conseguenza, dietro la nota del n° 77 e la formola (10) risulta per la richiesta distanza,

$$\overline{M'M''}^2 = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2 + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos(x',y') + 2(x'-x'')(z'-z'')\cos(x',z') + 2(y'-y'')(z'-z'')\cos(y',z').$$

79. Le formole atte *a passare da un sistema obbliquo ad un altro sistema anche obbliquo*, sono assai di rado adoperate a cagione della loro complicazione; ma per compiere intanto questa teoria, esporremo un metodo onde pervenirvi non impiegando che proiezioni *ortogonali*. Sia M (*fig.* 16) un punto dello spazio che riferito successivamente a due sistemi di assi obbliqui OX, OY, OZ, ed OX', OY', OZ', abbia per coordinate

$$z = MP,\ y = PQ,\ x = OQ,$$
$$z' = MP',\ y' = P'Q',\ x' = OQ'.$$

Per l'origine comune O eleviamo perpendicolarmente al piano XY *una normale* ON, *diretta riguardo a questo piano dalla stessa parte del semiasse positivo* OZ, e proiettiamo su di questa normale la linea spezzata $x+y+z$: questa proiezione si ridurrà a quella di $MP = z$, essendochè le altre coordinate sono nel piano XY perpendicolare ad ON; e si avrà in tal modo (n° 67)

$$ON = z\cos(N, z).$$

Ora se noi proiettiamo sulla stessa normale la linea spezzata $x'+y'+z'$, che ha le medesime estremità della precedente, avremo ancora

$$ON = OG + GH + HN$$
$$= x'\cos(N, x') + y'\cos(N, y') + z'\cos(N, z'),$$

formola che converrà a tutte le situazioni, purchè in essa si tenga conto, come si è indicato nel n° 72, dei segni delle coordinate e di quelli dei coseni degli *angoli compresi tra i semiassi positivi e la normale* ON diretta nel modo detto di sopra. Ciò posto, eguagliando i due valori precedenti di ON, si otterrà l'espressione di z in funzione delle tre novelle coordinate: ma se si elevino del pari due altre normali ON', ON'', rispettivamente perpendicolari ai piani XZ, YZ, e *dirette dal medesimo verso dei semiassi positivi* OY, OX; e poscia si proiettino ancora su queste novelle normali le due linee spezzate $x+y+z$ ed $x'+y'+z'$, si avranno ad evidenza risultamenti consimili ai precedenti, i quali somministreranno finalmente per le formole richieste,

$$(11)\quad \begin{cases} z\cos(N, z) = x'\cos(N, x') + y'\cos(N, y') + z'\cos(N, z'), \\ y\cos(N', y) = x'\cos(N', x') + y'\cos(N', y') + z'\cos(N', z'), \\ x\cos(N'', x) = x'\cos(N'', x') + y'\cos(N'', y') + z'\cos(N'', z'). \end{cases}$$

80. Gli angoli che entrano in queste equazioni suppongono introdotte le normali ausiliarie, distinte dagli assi antichi e nuovi; ma vi si potrebbero sostituire gli angoli formati dai dati immediati della quistione, osservando che

$$\cos(N, z) = \text{sen}(z, xy), \quad \cos(N, x') = \text{sen}(x', xy), \quad . \quad .$$
. . . .

Ciò tuttavolta avrebbe l'inconveniente di far adoperare angoli *negativi* nei secondi membri; giacchè si comprende facilmente che il fattore $\text{sen}(x', xy)$, per esempio, dovrebbe andar affetto dal segno *meno*, se il semiasse positivo OX' cadesse dal lato opposto ad OZ per rispetto al piano XY. Val meglio perciò serbare le formole sotto la forma (11), giacchè gli angoli non potendo variare che da o a $180°$, i coseni prendono da se stessi i segni convenevoli.

Osserviamo finalmente che supponendo *rettangolari* gli assi primitivi OX, OY, OZ, le tre normali ON'', ON', ON verranno a coincidere con questi assi, e le formole (11) faranno rivenire allora sull'equazioni (4) del n° 72.

81. In tutte le precedenti trasformazioni di coordinate, si è supposto l'origine restare invariabile. Ora, se spostando gli assi parallelamente a se stessi, si trasportasse soltanto l'origine dal punto O ad un altro punto O', le cui coordinate relative ad O fossero contrassegnate da α, β, γ, è chiaro che bisognerebbe adoperare le formole

$$x=x''+\alpha,\ y=y''+\beta,\ z=z''+\gamma;$$

d'onde risulta palesemente che per passare da un sistema di assi OX, OY, OZ ad un altro sistema $O'X', O'Y', O'Z'$, di cui la direzione e l'origine sono differenti, basterà aggiungere ai valori di x,y,z, trovati pei diversi casi precedenti, le coordinate α,β,γ della novella origine O', contate parallelamente agli antichi assi.

82. Importa osservare che quando si adopera uno dei sistemi delle formole precedenti per riferire a novelli assi l'equazione di una superficie $F(x,y,z)=0$, l'equazione trasformata $F'(x',y',z')=0$ sarà sempre del *medesimo grado* n della primitiva; essendo noto che per grado di una equazione intendesi *la più alta somma degli esponenti delle tre variabili in un medesimo termine*. Difatti, in tutti questi sistemi i valori di x,y,z essendo lineari per rispetto ad x',y',z', una quantità come x^p diverrà $(ax'+by'+cz'+\alpha)^p$, i cui termini sono al più della dimensione p; ed un prodotto $x^p.y^q.z^r$ darà dei termini $x^{p'}.y^{q'}.z^{r'}$, nei quali $p'+q'+r'$ eguaglierà tutto al più il grado $p+q+r$: laonde primieramente il grado n' dell'equazione $F'(x',y',z')=0$ non potrà sorpassare n.

Non potrebbesi d'altronde pretendere che per riduzioni di termini il grado n' sia divenuto minore di n. Dappoichè sostituendo in $F'(x',y',z')=0$ i valori di x',y',z', tratti dalle formole adoperate per la primitiva trasformazione, valori che sono ancora evidentemente *lineari*, devesi sempre ricadere sull'identica $F(x,y,z)=0$; ora ciò importerebbe che il grado n' potesse elevarsi sino ad n per una trasformazione di coordinate, il che si è dimostrato impossibile; per conseguenza il grado n' resterà sempre eguale ad n.

Di qui è che, come si è veduto nel n° 38, l'equazione del piano è sempre di primo grado, siano gli assi rettangolari oppure obbliqui.

83. Ogni sezione fatta in una superficie $F(x,y,z)=0$

di grado n da un piano qualunque, è una curva *di grado* n *al sommo*.

Di fatti, concepiscasi che questa superficie sia riferita ad altri assi, due dei quali, OX', ed OY', *siano allogati nel piano secante*: allora la sua equazione $F'(x',y',z')=0$ sarà parimente (n° 82) del grado n; e siccome per ottenere la richiesta sezione è chiaro che basterebbe porre quivi $z'=0$, così il risultamento non potrà essere di grado superiore ad n. Soltanto questo grado sarà minore, se l'ipotesi $z'=0$ annullasse tutt'i termini dell'ordine il più elevato.

84. Per conoscere questa sezione *nella vera grandezza*, il che è utile nella discussione delle superficie, non basterebbe combinare $F(x,y,z)=0$ coll'equazione del piano secante $Ax+By+Cz+D=0$, eliminandone, a cagion di esempio, la variabile z; giacchè il risultato $f(x,y)=0$ rappresenterebbe soltanto la *proiezione* della curva domandata, proiezione che per ordinario non è identica alla sezione nello spazio: ma conviene effettuare una trasformazione di coordinate, analoga all'andamento indicato nel n° 83, e pel quale daremo delle formole dirette dopo di aver determinato, 1.° l'angolo φ che forma colla OX la traccia del piano secante sul piano XY; 2.° l'angolo θ esprimente l'inclinazione del piano secante sullo stesso piano XY. Ora la traccia di cui è parola essendo $Ax+By+D=0$, si avrà $\tan\varphi=\frac{-A}{B}$; e per le formole del n° 56, è noto essere $\cos\theta=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

85. Ciò posto, siano OX, OY, OZ (*fig.* 15) gli assi rettangolari, ai quali vien riferita la superficie $F(x,y,z)=0$; sia OAB il piano secante che supponiamo passare per l'origine, ed OX' la sua traccia sul piano XY. Conducendo in questo piano secante una retta OY' perpendicolare alla OX', cerchiamo di rapportare a questi due ultimi assi, la sezione fatta dal piano OAB nella superficie. Ora per un punto M di questa sezione si ha nel tempo stesso

$$MP=z,\ PQ=y,\ OQ=x,$$
$$MR=y',\ OR=x';$$

quindi se tiriamo la retta RP, questa sarà palesemente per-

pendicolare su di OX', e parallela alla proiezione ortogonale OY'' di OY' sul piano XY; per modo che l'inclinazione del piano segante sarà misurata dall'angolo $MRP = Y'OY'' = \theta$. Allora il triangolo rettangolo MRP darà

$$MP = z = y' \operatorname{sen}\theta,$$
$$PR = y'' = y' \cos\theta;$$

ma considerando il punto P, proiezione di M, come riferito successivamente ai due sistemi di coordinate *rettangolari* $x = OQ$, $y = PQ$, ed $x' = OR$, $y'' = PR$, si avranno tra queste coordinate le note relazioni

$$x = x' \cos\varphi + y'' \operatorname{sen}\varphi,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\varphi - y'' \cos\varphi:$$

son queste le fórmole ordinarie per la trasformazione delle coordinate rettangolari in un piano; soltanto abbiamo mutato da per tutto il segno di y'', essendochè nell'attuale figura le y'' positive si proiettano sulle y negative. Adunque sostituendo quivi il precedente valore di y'', si otterranno infine per le coordinate di un punto comune alla superficie ed al piano OAB, l'espressioni

$$(12) \quad \begin{cases} x = x' \cos\varphi + y' \cos\theta . \operatorname{sen}\varphi, \\ y = x' \operatorname{sen}\varphi - y' \cos\theta . \cos\varphi, \\ z = y' \operatorname{sen}\theta . \end{cases}$$

Così queste formole, sostituite in $F(x,y,z) = 0$, daranno l'equazione $f(x',y') = 0$ della sezione *riferita ad assi rettangolari presi nel suo piano.*

86. Se il piano segante AOB fosse perpendicolare ad XY, bisognerebbe porre $\theta = 90°$, e le tre formole (12) si ridurrebbero alle due seguenti:

$$(13) \quad \begin{cases} x = x' \cos\varphi, \\ y = x' \operatorname{sen}\varphi, \end{cases}$$

poichè qui l'asse OY' coincidendo con OZ, è inutile sostituire y' all'antica coordinata z; e l'equazione della sezione fatta in $F(x.y,z) = 0$, si mostrerà in tal caso sotto la forma $f(x',z) = 0$.

87. Si potrebbero d'altronde ottenere direttamente le formole (13) passando dal sistema primitivo OZ, OX, OY, ad un altro sistema rettangolare OZ, OX', OY': il che non ri-

chiede che l'uso dell'equazioni relative al cangiamento delle coordinate in un piano, per essere l'asse OZ comune.

Si porrebbe adunque

$$(14)\qquad \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi, \\ y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases}$$

e fattane la sostituzione in $F(x,y,z)=0$, resterebbe a mettere nel risultamento $y'=0$, giacchè quì non cercansi che i punti della superficie allogati nel piano segante, il quale coincide con ZX': ora ciò riducesi chiaramente ad introdurre sulle prime la condizione $y'=0$ nelle formole (14), le quali coincideranno perciò coll'equazioni (13).

88. È da por mente che allorquando il piano segante non passerà per l'origine degli assi primitivi, o quando si vorrà situare l'origine de' novelli assi in ogni altra parte che in O nel piano segante, converrà (n° 81) aggiungere ai secondi membri delle formole (12) e (13) le coordinate della novella origine, contate parallelamente agli assi primitivi.

89. *Formole di Eulero per passare da un sistema rettangolare ad un altro sistema rettangolare.*

Le formole (4), (5) e (6) che abbiamo dato nei n^{i} 72 e 73 per raggiungere questo scopo sono molto semplici e simmetriche; ma hanno l'inconveniente di racchiudere *nove* costanti $a,b,c,a',b',\ldots$ che si trovano legate da *sei* equazioni di condizione, tra le quali la eliminazione non può effettuarsi con agevolezza per ridurre a *tre dati*, come dovrebbe essere fattibile, la determinazione dei nuovi assi relativamente agli antichi. Si è perciò cercato di esprimere queste nove costanti in funzione di tre altre nel modo seguente: siano OX, OY, OZ (*fig.* 13) i tre assi rettangolari primitivi ed ON la traccia del nuovo piano $X'Y'$ su di XY: questo piano $X'Y'$ sarà determinato dall'angolo $NOX=\psi$, e dalla sua inclinazione θ sul piano XY; e se inoltre è dato l'angolo $NOX'=\varphi$ che forma l'asse OX' con ON, la posizione di questo asse OX' sarà conosciuta, del pari che quella di OY' che gli è perpendicolare; ed infine il terzo asse OZ' dovrà condursi perpendicolarmente ai due primi, e formerà l'angolo $ZOZ'=\theta$.

Supponiamo qui inoltre il piano $X'Y'$ situato *al di sotto* di XY, onde far corrispondere le nostre formole con quelle che vengono adoperate ordinariamente nella Meccanica.

Ciò posto noi arriveremo ai valori x, y, z in funzione di x', y', z' con successivi sistemi rettangolari, i quali avendo a due a due un *asse comune*, non richieggono che l'uso delle formole (14) relative alla trasformazione delle coordinate in un piano. Se si riguardi in fatti la retta ON come un asse ausiliare OX'', e se ne immaginino due altri OY'', OY''' che siano le intersezioni dei piani XY ed $X'Y'$ col piano ZOZ', si passerà dal sistema primitivo OX, OY, OZ al sistema OX'', OY'', OZ, mediante le formole

$$(15)\qquad \begin{cases} x = x'' \cos\psi + y'' \operatorname{sen}\psi, \\ y = y'' \cos\psi - x'' \operatorname{sen}\psi; \end{cases}$$

poscia dal sistema OX'', OY'', OZ, si passerà al sistema OX'', OY''', OZ', per le analoghe relazioni

$$\begin{aligned} y'' &= y''' \cos\theta + z' \operatorname{sen}\theta, \\ z &= z' \cos\theta - y''' \operatorname{sen}\theta; \end{aligned}$$

ed infine si passerà dal sistema OX'', OY''', OZ' all'altro OX', OY', OZ', per mezzo dell'equazioni

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi, \\ y''' &= y' \cos\varphi + x' \operatorname{sen}\varphi; \end{aligned}$$

e sostituendo questi diversi valori nei precedenti, si rinverranno per espressioni delle coordinate x, y, z in funzione di x', y', z' e degli angoli θ, φ, ψ le formole

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \;\; x' (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi + \cos\varphi \cos\psi) \\ \quad + y' (\cos\theta \cos\varphi \operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi \cos\psi) \\ \quad + z' \cdot \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi: \\ y = \;\; x' (\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi - \cos\varphi \operatorname{sen}\psi) \\ \quad + y' (\cos\theta \cos\varphi \cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi) \\ \quad + z' \operatorname{sen}\theta \cos\psi: \\ z = - x' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - y' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + z' \cos\theta. \end{cases}$$

90. Coordinate Polari. (*fig.* 12) Si può ancora stabilire la posizione di un punto M nello spazio mediante le tre variabili seguenti: 1.° il raggio vettore $OM = r$; 2.° l'angolo $ZOM = \theta$, formato da questo raggio coll'asse positivo OZ; 3.° l'angolo $POX = \varpi$, che il piano *meridiano* ZOM fa col piano fisso ZOX. Di questi due angoli il primo θ, che è compreso tra due rette prolungate da un solo lato del *polo* O,

non varia che da o a $180°$; laddove il secondo ω dovrà variare da o a $360°$, acciò il raggio vettore OM possa percorrere tutt'i punti dello spazio. Ora volendo esprimere in funzione di r, θ, ω le coordinate rettangolari $MP=z.PQ=y$, $OQ=x$, osserviamo che i triangoli rettangoli OMP e POQ danno

$$x=OP\cos\omega\,,\; y=OP\,\text{sen}\omega\,,\; OP=r\,\text{sen}\theta\,,\; z=r\cos\theta\,;$$

d'onde si desume

$$(17)\quad x=r\,\text{sen}\theta\cos\omega\,,\; y=r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\omega\,,\; z=r\cos\theta.$$

91. Abbiamo dinanzi (n° 29) rinvenute per valori di queste coordinate in funzione del raggio vettore r e dei tre angoli α, β, γ, ch'esso forma cogli assi rettangolari, le relazioni

$$(18)\qquad x=r\cos\alpha\,,\; y=r\cos\beta\,,\; z=r\cos\gamma\,;$$

cosicchè confrontando le formole (17) colle (18), scorgesi potersi esprimere questi tre angoli in funzione de'due ω e θ, il secondo dei quali e quì lo stesso che γ. Questa riduzione ben si accorda d'altronde colla dipendenza che deve sempre aver luogo tra α,β,γ, la quale è data (n° 31) dall'equazione

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

CAPITOLO V.

DEL CENTRO NELLE SUPERFICIE, ED IN ISPECIALITÀ IN QUELLE DI SECONDO GRADO.



92. Appellasi *centro* di una qualsivoglia superficie un punto O tale che ogni *corda* MOM', NON',.... condotta per esso, resta divisa (*fig.* 17) *in due parti eguali*. Nondimeno conviene aggiungere che se la retta OM tagliasse la superficie in più di due punti, basterebbe che questi combinati in un certo ordine si rattrovassero a due a due ad eguali distanze da O. Ciò posto, se concepiscasi la superficie riferita a tre assi rettangolari ovvero obbliqui, *l'origine dei quali sia nel centro* O, e si conducano parallelamente ad OZ le ordinate MP ed $M'P'$ dagli estremi di una corda,

scorgesi di leggieri che per l'eguaglianza dei triangoli MOP, $M'OP'$, queste ordinate sono eguali e di segni contrari. Lo stesso ha luogo evidentemente per le x e per le y dei punti M, M', e così per ogni altra corda che passi per lo centro: d'onde seguita che se $f(x, y, z) = 0$ rappresenta l'equazione della superficie *riferita al centro quale origine*, questa equazione dovrà trovarsi verificata da infiniti sistemi di valori come

$$x', y', z', \quad e \quad -x', -y', -z',$$
$$x'', y'', z'', \quad e \quad -x'', -y'', -z''.$$

. . . .

Per conseguenza *importa che l'equazione* $f(x,y,z) = 0$ *sia composta in modo che punto non cangi quando si mutano ad un tempo i segni delle variabili* x, y, z: ed è parimente vera la proposizione reciproca.

93. Allorquando l'equazione $f(x,y,z)=0$ riferita al centro è *algebrica*, vale a dire che non racchiude alcuna funzione trascendente, la condizione anzidetta riducesi chiaramente a dire, che in ogni termine *la somma degli esponenti* delle variabili *deve esser pari o dispari* a seconda del *grado dell'equazione*. Cosicchè quando l'equazione sarà di grado *pari*, bisognerà che non vi entrino che termini di *grado* benanche *pari;* e quando sarà di grado *dispari*, *dispari* pure dovrà essere il *grado* dei termini, essendochè questi cambiano tutti di segno sostituendo ad $x,y,z,-x,-y,-z$: il che non muterà l'equazione, per essere zero il secondo membro. Ben si comprende che in questo ultimo caso l'equazione non potrebbe avere termine *costante;* laonde essa sarà verificata dai valori simultanei $x=0$, $y=0$, $z=0$, ed in tal modo una delle falde della superficie passerà per lo centro. A cagione di esempio, ciascuna dell'equazioni

$$Axyz^2 + Bxy^3 + Cyz + Dxy + E = 0,$$
$$Axyz + Byz^2 + Cx + Dy + Ez = 0,$$

rappresenta una superficie che ammette per centro l'origine delle coordinate attuali.

94. Sia intanto $F(x,y,z) = 0$ l'equazione *algebrica* di una superficie riferita ad assi qualunque. *Per riconoscere se essa ammetta un centro*, bisognerà soltanto trasportare gli assi parallelamente a loro stessi in un punto indetermi-

nato (x_1, y_1, z_1), sostituendo in $F(x,y,z)=0$ le formole (n° 81),

$$x=x'+x_1,\ y=y'+y_1,\ z=z'+z_1;$$

quindi eguagliare a zero i coefficienti di tutt' i termini ove *la somma degli esponenti non sarà dello stesso ordine del grado dell' equazione*, ed osservare se si possa soddisfare a queste condizioni per mezzo di valori reali e finiti delle coordinate x_1, y_1, z_1, le quali allora determineranno pel centro richiesto la novella origine; ma qualora non sarà dato soddisfare a queste condizioni per via di tali valori, la proposta superficie non ammetterà alcun centro.

95. Facciamo applicazione di questi principî alle superficie di secondo grado, che tutte si comprendono nella seguente equazione generale: (1)

$$\left.\begin{matrix}Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy\\ +2Cx+2C'y+2C''z+E\end{matrix}\right\}=0=\varphi(x,y,z).$$

Lasciandovi le coordinate qualunque, *rettangolari* ovvero *oblique*, per riconoscere se queste superficie ammettono tutte un centro vi sostituiremo $x=x'+x_1$, $y=y'+y_1$, $z=z'+z_1$, e quindi eguaglieremo a zero i coefficienti dei termini di *grado dispari*. Sopprimendo allora gli accenti delle novelle coordinate, l' equazione risultante diverrà

$$(2)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+K=0,$$

nella quale i coefficienti delle variabili non sono punto diversi da quelli dell'equazione (1), ed il termine costante pareggia $\varphi(x_1, y_1, z_1)$, vale a dire che

$$K=Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2By_1z_1+2B'z_1x_1+2B''x_1y_1 \\ +2Cx_1+2C'y_1+2C''z_1+E.$$

I termini svaniti danno d' altronde l' equazioni di condizione

$$(3)\quad A\,x_1+B'z_1+B''y_1+C=0,$$
$$(4)\quad A'\,y_1+Bz_1+B''x_1+C'=0,$$
$$(5)\quad A''z_1+B'x_1+B\,y_1+C''=0,$$

e se queste si risolvano, se ne dedurranno valori della forma

$$x_1=\frac{N}{D},\quad y_1=\frac{N'}{D},\quad z_1=\frac{N''}{D},$$

nei quali

$$D = AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'',$$
$$N = C(A'A'' - B^2) + C'(BB' - B''A'') + C''(BB'' - B'A'),$$
$$N' = C'(AA'' - B'^2) + C''(B'B'' - BA) + C(BB' - B''A''),$$
$$N'' = C''(AA' - B''^2) + C(BB'' - B'A') + C'(B'B'' - BA).$$

96. Ciò posto, allorquando l'equazione data (1) renderà il polinomio $D \gtrless 0$, i valori precedenti di x_1, y_1, z_1, che sono sempre reali, si troveranno *finiti*; per conseguenza la superficie ammetterà *un centro unico*, la cui posizione verrà determinata dalle coordinate x_1, y_1, z_1 della novella origine, per la quale l'equazione della superficie prenderà la forma (2).

Se l'equazione (1) rende il polinomio $D = 0$, ed i tre numeratori N, N', N'' non sono nulli nel tempo stesso, una almeno delle coordinate del centro diverrà infinita: il che dinota che in tal caso la superficie è *sfornita di centro*.

Se finalmente nel tempo stesso che $D = 0$, i tre numeratori N, N', N'' sono tutti nulli, la superficie ammetterà un numero *infinito di centri*, giacchè allora l'equazioni (3), (4), (5) si ridurranno ad una o a due equazioni veramente distinte, ciò che permette di soddisfarvi mediante infiniti valori di x_1, y_1, z_1; ma questo caso offre due varietà che è necessario esaminare separatamente.

97. Allorquando il sistema (3), (4), (5) riducesi a *due equazioni* distinte, il che si riconoscerà vedendo se i valori di x_1, y_1, tratti da (3) e (4), per esempio, verificano (5), qualunque sia la z_1, si potrà conchiudere che esistono infiniti centri situati tutti sulla retta EF (*fig.* 17 *bis*) rappresentata da (3) e (4); ed in tal caso la superficie sarà necessariamente *un cilindro* a base *ellittica* o *iperbolica*. Difatti, allora tutti i piani condotti per EF taglieranno la superficie in linee di secondo grado (n° 83), le quali dovranno evidentemente ammettere per centri tutt'i punti $O', O'', \ldots$ di EF; laonde ciascuna di queste sezioni non potrà essere che il sistema di *due rette parallele* ad EF: cosicchè la proposta superficie risultando il luogo geometrico di diverse rette parallele tra loro, non potrà essere che un cilindro. Dico inoltre che questo cilindro avrà di necessità una base *ellittica* o *iperbolica*; giacchè se si tagliasse con un piano $GO'H$

perpendicolare ad *EF*, dovrebbe trovarsi per sezione una curva di secondo grado che ammette per centro il punto *O'*.

98. Quando l'equazioni (3), (4), (5) si ridurranno ad *una sola*, il che si riconosce osservando se il valore di x, tratto per esempio da (3), verifica (4) e (5), qualunque sieno y_1, z_1; potrà conchiudersi che esistono bensì infiniti centri allogati tutti nel piano *GO'F* determinato dall'equazione (3); ed allora la superficie proposta non sarà altra cosa che il sistema di *due piani paralleli* a *GO'F*. Di fatti, tracciando in quest'ultimo piano due rette *EF* e *GH*, si dimostrerà come nel n° 97 che la superficie è un cilindro parallelo ad *EF*. Ma poscia un piano secante, condotto per *GH* perpendicolarmente al primo, dovrà dare una curva che abbia per centro tutt' i punti di *GH*; vale a dire che questa sezione, base del cilindro, sarà il sistema di due rette parallele a *GH*, e per conseguenza il cilindro stesso ridurrassi a due piani paralleli a quello dei centri. In tal caso l'equazione (1) si potrà decomporre in due fattori razionali di primo grado.

99. Rilevasi da questa discussione che le superficie di secondo grado possono essere ordinate in tre classi: la prima comprende *le superficie che hanno un centro unico*; la seconda *le superficie sfornite di centro*; e la terza i *cilindri* i quali ammettono infiniti centri, allogati tutti su di un *asse centrale* o su di *un piano centrale*. Ma siccome questi cilindri si troveranno compresi, come vedremo in seguito, nell'equazioni delle superficie dotate di un centro, così potremo limitare l'enunciato generale alle due prime classi.

Tuttavolta, poichè la considerazione del centro, che sarebbe atta a semplificare l'equazione generale (1) ed a renderne più facile la discussione, non è punto applicabile a tutte le superficie di second'ordine, noi per ridurre quest'equazione ci faremo ad impiegare un'altra proprietà, che avrà il vantaggio di essere comune a tutte queste superficie: cioè la proprietà de' piani diametrali.

CAPITOLO VI.

DEI PIANI DIAMETRALI, E DELLA RIDUZIONE DELL' EQUAZIONE GENERALE DI SECONDO GRADO ALLE DUE FORME PIÙ SEMPLICI.



100. In qualsivoglia superficie $F(x,y,z)=0$, se conducansi delle *corde* tutte parallele ad una data direzione, e si prendano i punti medî di queste rette, il luogo geometrico di tutti questi punti formerà ciò che chiamasi ***superficie diametrale*** della prima. Essa avrà più di una falda, se ciascuna delle rette parallele ha più di due punti comuni colla proposta superficie; e siccome il numero di questi punti d'intersezione, tra reali e immaginarî, eguaglierà sempre il grado n dell'equazione $F(x,y,z)=0$, le loro combinazioni a due a due formeranno su di una medesima retta indefinita $\frac{n(n-1)}{2}$ corde differenti, i cui punti medî saranno di egual numero: per conseguenza la superficie diametrale potendo essere incontrata da questa retta indefinita in $\frac{n(n-1)}{2}$ punti, avrà una equazione del grado $\frac{n(n-1)}{2}$ (*).

Per le superficie di secondo grado, nelle quali $n=2$, le superficie diametrali non possono essere che piani.

101. Allorquando una superficie qualunque $F(x,y,z)=0$ ammette un *piano diametrale*, vale a dire un piano che passa pei punti medî di tutte le corde parallele ad una certa direzione, se si riferisce questa superficie a tre assi di cui due siano qualunque, ma ***situati in un piano diametrale***, ed il terzo ***OZ parallelo alle corde coniugate con quel piano;*** allora la novella equazione $f(x,y,z)=0$ di questa superficie dovrà evidentemente per ciascun sistema di valori simultanei $x=a$ ed $y=b$, somministrare valori di z che siano a due a due eguali e di segni contrarî. Laonde que-

(*) Di queste considerazioni e dell' uso utilissimo del piano diametrale per simplificare l'equazione generale di secondo grado, siamo debitori al signor I. Binet. (Vedi *la corrispondenza sulla Scuola Politecnica*, vol. 2°, p. 74.)

sta equazione, supposta algebrica, *non dovrà contenere che potenze pari della variabile* z; il che peraltro non esclude i termini costanti, indipendenti dalla z, come in

$$Az^4 + Byz^2 + Cx^3 + Dy + E = 0.$$

Reciprocamente, tutte le volte che una equazione non racchiuderà che potenze pari di una delle variabili, della z per esempio, potrà affermarsi che il piano delle xy è *diametrale* e *coniugato* colle corde parallele all'asse delle z.

102. *Tre piani diametrali diconsi* CONJUGATI *tra loro, allorquando ciascuno di essi taglia in due parti eguali le corde che sono parallele alla intersecazione dei due altri piani;* ed in tal caso si dimostrerà, come per lo innanzi, che quando una superficie ammette tre piani di questo genere, e questi si scelgono per piani coordinati, l'equazione $f(x,y,z) = 0$, supposta algebrica, non *deve contenere che potenze pari di ciascuna delle tre variabili.*

103. Siccome i piani diametrali, isolati o coniugati, sono in generale obbliqui relativamente alle corde che essi tagliano per metà, così noi daremo il nome particolare di *piano principale* a quello che rattrovasi nel tempo stesso *diametrale* e *perpendicolare* alle sue corde coniugate.

104. Denomineremo bensì *diametro* di una superficie ogni retta che è l'intersezione di due piani diametrali; e se questi due piani fossero *principali*, la loro intersezione diverrebbe un *diametro principale*, ovvero un *asse* della superficie. Questa definizione dei diametri avrà il vantaggio di potersi applicare parimente alle superficie sfornite di centro.

Si dà infine il nome di *vertici* a quei punti in cui una superficie incontra qualcuno dei suoi assi.

Ciò posto, per ridurre l'equazione generale delle superficie di secondo grado ad una forma semplice, la quale abbracci nulladimeno tutte le superficie di quest'ordine, e che *conservi le coordinate rettangolari* colle quali si scorgono vie meglio i punti e le linee notevoli, ci faremo a dimostrare che in tutte queste superficie esiste almeno *un piano principale.*

105. Cerchiamo primieramente il piano diametrale che sarebbe coniugato con un sistema di corde parallele, la cui direzione è fissata dagli angoli α, β, γ, ch'esse formano con tre assi *rettangolari qualunque.* La superficie, riferita a

questi medesimi assi, avrà per equazione la più generale,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx \\ +2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+E \end{array}\right\}=0=\varphi(x,y,z);$$

ed una delle corde del dato sistema sarà rappresentata da

$$(2)\qquad x=mz+p\,,\; y=nz+q\,,$$

ove le quantità $m=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $n=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$ (nº 30) saranno le medesime per tutte le corde in quistione, mentre che p e q varieranno da una corda all'altra. Per avere i punti in cui la retta (2) incontra la superficie φ, sostituisco in (1) le coordinate x,y di questa retta, il che conduce al seguente risultato:

$$\left.\begin{array}{l} z^2\,(Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn) \\ +2z\,(Amp+A'nq+Bq+B'p+B''mq+B''np \\ \qquad +Cm+C'n+C'') \\ +Ap^2+A'q^2+2B''pq+2Cp+2C'q+E \end{array}\right\}=0.$$

Questa equazione avrebbe per radici le ordinate delle due estremità della corda; ma l'ordinata z_1 del punto medio dovendo essere la semisomma di quelle, si può, senza risolvere l'equazione precedente, dedurne immediatamente che

$$z_1=-\frac{p(Am+B'+B''n)+q(A'n+B+B''m)+Cm+C'n+C''}{Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn}.$$

D'altronde le tre coordinate x_1,y_1,z_1 di questo punto medio dovendo verificare l'equazioni (2) della corda, si avrà pure

$$x_1=mz_1+p\,,\quad y_1=nz_1+q\,;$$

per modo che se fra le tre ultime equazioni si eliminino p e q, le quali sole distinguono una corda del sistema dato da un'altra del medesimo sistema, si otterrà l'equazione della superficie diametrale richiesta. Ora sostituendo $p=x_1-mz_1$, $q=y_1-nz_1$, nel valore di z_1, trovasi dopo varie riduzioni,

$$\left.\begin{array}{l}(Am+B''n+B')x_1+(A'n+B''m+B)y_1+ \\ \quad(A''+Bn+B'm)z_1+Cm+C'n+C''\end{array}\right\}=0;\ (3)$$

questa è dunque l'equazione del piano diametrale, e giova osservare che essa conserverebbe la stessa forma, quando anche la superficie (1) fosse riferita ad ***assi obliqui;*** ben

vero che in tal caso le costanti m ed n cangerebbero significato geometrico (n° 16).

106. Risulta da quanto precede che per ogni sistema di corde parallele, la cui direzione è dinotata dagli angoli α,β,γ, o dalle costanti m ed n, esiste un piano diametrale, giacchè sono reali i coefficienti di x_1, y_1, z_1 nell'equazione (3). Ma per verità questo piano troverebbesi a distanza infinita se i coefficienti delle tre variabili fossero nulli simultaneamente, vale a dire se la direzione delle corde fosse tale da aversi ad un tempo

$$Am + B' + B''n = 0,$$
$$A'n + B + B''m = 0,$$
$$A'' + Bn + B'm = 0;$$

ora perchè queste tre equazioni, le quali non racchiudono che due incognite, potessero accordarsi, scorgesi facilmente che la condizione $D = 0$ (n° 96) dev'essere soddisfatta. Adunque la circostanza del piano diametrale situato all'infinito non può aver luogo che nelle superficie sfornite di centro; ma ciò non ostante avremo in seguito riguardo a questa restrizione.

107. Reciprocamente, essendo dato un piano $Rx+Sy+z=0$ può trovarsi la direzione delle corde che sono coniugate con un piano parallelo al primo; essendochè questo novello piano

$$Rx + Sy + z + T = 0$$

fatto identico all'altro (3), darà per determinare m ed n, le condizioni seguenti

$$R = \frac{Am+B'+B''n}{A''+Bn+B'm}, \quad S = \frac{A'n+B+B''m}{A''+Bn+B'm};$$

ma bisognerà quindi adottare per T il valore

$$T = \frac{Cm+C'n+C''}{A''+Bn+B'm}.$$

108. È da osservare che ogni piano diametrale passa per lo centro, o in generale pel luogo geometrico dei centri; dappoichè si può verificare che l'equazione di questo piano è soddisfatta quando vi si sostituiscono le coordinate del centro, somministrate dall'equazioni (3), (4), (5) del n° 95: circostanza la quale poteva d'altronde antivedersi per la definizione stessa del centro.

109. Ricerchiamo ora se, fra tutt' i piani diametrali che la superficie φ ammette, ve n' ha qualcuno che sia *principale* (n° 103). Per la qual cosa fa d' uopo non dare più ad arbitrio gli angoli α, β, γ, ovvero i coefficienti m ed n, ma sceglierli tali che il piano diametrale (3) riesca perpendicolare alla corda (2). Cosicchè devesi soddisfare (n° 47) alle due condizioni

$$(4) \quad \frac{Am+B'+B''n}{A''+Bn+B'm}=m, \qquad (5) \quad \frac{A'n+B+B''m}{A''+Bn+B'm}=n,$$

dalle quali potrebbe dedursi, per mezzo dell' eliminazione di m, una equazione di terzo grado soltanto che ammettesse sempre per n un valore reale; ma si perviene ad un risultamento più simmetrico, e che ci sarà inoltre giovevole in seguito, introducendo una incognita ausiliare

$$s=A''+Bn+B'm;$$

allora l' equazioni (4) e (5) si trovano sostituite dalle tre seguenti, che sono di primo grado in m ed n,

$$(6) \quad Am+B'+B''n=ms,$$
$$(7) \quad A'n+B+B''m=ns,$$
$$(8) \quad A''+Bn+B'm=s.$$

Ora dalle due prime si ottiene

$$(9) \quad m\left[(s-A)(s-A')-B''^2\right]=B'(s-A')+BB''$$
$$(10) \quad n\left[(s-A)(s-A')-B''^2\right]=B(s-A)+B'B'';$$

e sostituendo in (8) questi valori di m ed n, risulta

$$(11) \quad \left\{\begin{matrix}(s-A)(s-A')(s-A'')-B^2(s-A)\\ -B'^2(s-A')-B''^2(s-A'')-2BB'B''\end{matrix}\right\}=0,$$

ovvero sviluppando

$$(12) \quad s^3-s^2(A+A'+A'')-s(B''^2-AA'+B'^2-AA''+B^2-A'A'')$$
$$+(AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B'')=0.$$

Questa equazione (*), essendo di grado dispari, ammet-

(*) Dovendo essa di necessità venir citata più innanzi, faremo qui osservare che il termine noto è precisamente il denominatore D delle coordinate del centro (n° 95): il coefficiente di s^2 è facile a rammentarsi, e quanto al coefficiente di s, esso si compone della somma dei tre binomi B''^2-AA', B'^2-AA'', $B^2-A'A''$, i quali sono analoghi a b^2-4ac nelle curve di secondo grado, e che servirebbero ad indi-

terà sempre una radice reale, alla quale corrisponderanno in (9) e (10) dei valori reali per m ed n. Per conseguenza *in ogni superficie di secondo grado esiste almeno un piano principale;* ed al più non possono esservi che *tre piani* di questo genere, meno che non fossero in numero infinito, ciò che avrebbe luogo se la forma particolare della superficie rendesse alcuna dell'equazioni (6), (7), (8) identica alle altre. Ma noi più lungi (n° 118) ritorneremo su di questa discussione.

110. Importa pur molto far osservare che la radice reale dell'equazione (12) ben dimostra *l'esistenza di un sistema di corde principali*, vale a dire tagliate ad angolo retto

---

care il genere delle sezioni fatte nella superficie (1) dai piani coordinati $z=0$, $y=0$, $x=0$, o da piani paralleli a questi.

Vedremo d'altronde in prosieguo (n° 117) che l'equazione (12) ha sempre le sue tre radici reali; ma il signor *Cauchy* ha dato di questa proposizione una dimostrazione *diretta* ed ingegnosa. A tal fine egli scrive l'equazione (11) sotto la forma

$$(11)\quad (s-A)[(s-A')(s-A'')-B^2]-[B'^2(s-A')+B''^2(s-A'')+2BB'B'']=0\,;$$

quindi osserva che nel caso particolare in cui fosse $B'=0$, e $B''=0$, le tre radici sarebbero

$$s=A\,,\; s=\frac{A'+A''}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A'-A'')^2+4B^2}=\begin{cases}a\\ b\end{cases};$$

ed allora ritornando al caso generale, fa in (11) le ipotesi seguenti:

$s=\infty$ che dà $+$,
$s=a$ .... $-$,
$s=b$ .... $+$,
$s=-\infty$ ..... $-$.

Perlochè essendo questi risultati alternativamente positivi e negativi, le tre radici dell'equazione sono tutte reali, e generalmente diseguali. Per manifestare ad evidenza il segno del risultato della sostituzione di $s=a$, fa d'uopo notare che le quantità $a-A'$, $a-A''$ sono essenzialmente positive, e possono rappresentarsi con h^2 e k^2; per modo che, essendo inoltre chiaramente $B^2=(a-A')(a-A'')=h^2k^2$, l'equazione (11) riducesi per $s=a$ alla forma di un quadrato negativo

$$-[B'^2h^2+B''^2k^2\pm 2B'B''hk].$$

Quando per lo contrario si pone $s=b$, le quantità $b-A'$, $b-A''$, sono della forma $-h^2$, $-k^2$, e si à pure $B^2=h^2k^2$; adunque l'equazione (11) dà allora un risultato necessariamente positivo.

dal loro piano diametrale; ma essa nulla insegna sulla posizione assoluta di questo piano, il quale potrebbe trovarsi *ad una distanza infinita* (n° 106), ed in tal caso non potrebbe venir adoperato come piano coordinato. È perciò che noi faremo dipendere le trasformazioni seguenti non proprio dal piano principale, ma dal sistema delle corde principali la cui realtà è certa.

111. Concepiscasi la superficie generale φ del n° 105 riferita a tre assi rettangolari, uno de' quali, OZ, sia preso *parallelo a queste corde principali;* bisognerà allora che l'equazioni (6), (7), (8) si trovino verificate dalle ipotesi $\alpha=90°$, $\beta=90°$, e $\gamma=0$, ovvero dai valori

$$m=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=0,\ n=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}=0.$$

Ora ciò produce chiaramente le condizioni $B'=0$, e $B=0$; donde risulta che per tali assi l'equazione della superficie di secondo grado *sarà sempre sgombra di due dei tre rettangoli*, e prenderà la forma

$$(13) Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+E=0.$$

Per conseguenza tutt' i generi di superficie di secondo grado si racchiudono senza eccezione in questa equazione, la quale nondimeno può ancora ridursi più semplice. Se di fatti, senza spostare l'asse OZ, si facciano girare nel loro piano gli assi OX ed OY, lasciandoli rettangolari per via delle note formole

$$x=x'\cos\omega-y'\,\text{sen}\,\omega,$$
$$y=x'\,\text{sen}\,\omega+y'\cos\omega,$$

si potrà far disparire il rettangolo xy, essendochè si perviene, come nell'equazione a due variabili, alla condizione

$$2\,\text{sen}\,\omega\cos\omega(A'-A)+2B''(\cos^2\omega-\text{sen}^2\omega)=0,$$

d'onde

$$\tan 2\omega=\frac{2B''}{A-A'}.$$

Questo valore reale e sempre ammissibile, anche quando $A=A'$, dimostra che l'equazione (13) può sempre ridursi alla forma

$$(14)\quad Px^2+P'y^2+P''z^2-Qx-Q'y-Q''z+E=0,$$

la quale racchiude ancora *tutte le superficie* di secondo grado, ed in cui $P, P', P'', Q \ldots$ possono avere segni e valori numerici qualunque; e di quì ha origine la separazione delle diverse classi.

112. Se i coefficienti P, P', P'' hanno tutti un valore effettivo, sarà sempre possibile di far svanire le prime potenze delle variabili; giacchè trasportando gli assi attuali parallelamente a se stessi per mezzo delle formole

$$x = x' + a\,,\; y = y' + b\,,\; z = z' + c\,,$$

si trovano le condizioni

$$2aP - Q = 0,\;\; 2bP' - Q' = 0,\;\; 2cP'' - Q'' = 0,$$

alle quali si può soddisfare per via di valori *finiti* di a, b, c, allorchè secondo l'ipotesi niuno dei coefficienti P, P', P'', è nullo. Per tal modo in questo caso l'equazione (14) si riduce alla forma

$$(15) \qquad Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H,$$

la quale comprende una *prima classe* di superficie di secondo grado.

113. Se un solo dei tre coefficienti dei quadrati trovasi nullo, per esempio $P = 0$, ed il coefficiente corrispondente $Q \gtrless 0$, non si potrà più far disparire il termine Qx, poichè il precedente valore di a sarebbe infinito; ma invece si potrà render nullo il termine costante, e ridurre l'equazione (14) alla forma

$$(16) \qquad P'y^2 + P''z^2 = Qx,$$

che presenta una *seconda classe* di superficie di secondo grado.

114. Allorquando nell'equazione (14) si ha nel tempo stesso $P = 0$, e $Q = 0$, senza che manchi veruno dei due altri quadrati, questa equazione riducesi per sè stessa a

$$P'y^2 + P''z^2 - Q'y - Q''z + E = 0;$$

e siccome essa non racchiude che due variabili, appartiene di necessità (n° 8) ad un *cilindro* perpendicolare al piano delle yz, e di cui la base sarà palesemente *una ellisse* o *una iperbole*. Ora egli è sempre possibile di riferire questa curva al suo centro, o di ricondurre l'equazione precedente alla forma

$$P'y^2 + P''z^2 = H;$$

e poichè questa si dedurrebbe dall' equazione (19) ponendo quivi $P=0$, così noi potremo riguardare i cilindri ellittici o iperbolici come una classe particolare, che si comprende nella *prima classe* generale rappresentata dall'equazione (19), intendendosi che in questa alcuno dei coefficienti può esser nullo.

115. Se finalmente nell'equazione (18) si ha nel tempo stesso $P=0$, e $P'=0$, resterà

$$P''z^2-Qx-Q'y-Q''z+E=0\,;$$

ma questa superficie tagliata da piani paralleli ad XY, come $z=h, z=h', z=h''$, ... dà sempre rette parallele tra loro; dunque essa è un *cilindro* parallelo al piano XY, ed a *base parabolica*, giacchè ponendovi $y=0$, si ottiene una parabola. Per verità i lati di questo cilindro sono obbliqui all'anzidetta base; ma tagliando la superficie con un piano ZOX', perpendicolare alle sue generatrici, si avrebbe ancora evidentemente una parabola; e l'equazione del cilindro, riferito al piano di questa *sezione retta*, si ridurrebbe (n° 8) a quella della sua novella base, che si sa potersi ridurre a

$$P''z'^2=Rx'.$$

Dunque siccome questa equazione può dedursi da (20) ponendovi $P'=0$, un tal genere particolare di superficie entra nella seconda classe.

116. Non esamineremo l'ipotesi di P, P' e P'' nulli ad un tempo, essendo impossibile (n° 82) che l'equazione (17) si abbassi al primo grado per mezzo di trasformazioni di coordinate.

117. Risulta da questa discussione, che tutte le superficie di second' ordine colle loro varietà, si comprendono nelle *due classi* rappresentate dall'equazioni a coordinate rettangolari

$$(15)\qquad Px^2+P'y^2+P''z^2=H,$$
$$(16)\qquad P'y^2+P''z^2=Qx.$$

Le superficie della prima classe hanno ad evidenza *un centro* che è l'origine delle attuali coordinate (n° 93), essendo pari la somma degli esponenti delle variabili in ogni termine, come il grado dell'equazione. Esse ammettono bensì *tre* piani principali coniugati tra loro (n[i] 102 e 103), che sono i piani coordinati rettangolari ai quali si trovano di presen-

te rapportate; imperciocchè ogni variabile non entra che a potenze pari nell'equazione (15). E da ciò si deduce che per queste superficie l'equazione (12) ha *le sue tre radici reali.*

Quanto alle superficie della seconda classe, *esse non ammettono verun centro*, dappoicchè trasportandone l'origine (n° 94) non si potrebbe giammai fare svanire il termine Qx, il cui grado non è *della stessa dimensione* di quello dell'equazione (16). Fra i piani coordinati attuali, quelli delle (x,y) e delle (x,z) soltanto sono *diametrali* e *principali*, stante che le variabili z ed y entrano ognuna con potenze pari; d'onde si conchiude che esistono qui almeno *due* sistemi di *corde principali*, che sono parallele all'asse delle z ed a quello delle y; e quindi il terzo sistema determinato cogli altri dall'equazione (12), dev'essere benanche reale: ma il piano principale corrispondente rattrovasi a distanza infinita, come tra poco vedremo.

Per mezzo di questa discussione resta inoltre dimostrato che in tutt'i casi *l'equazione* (12) del n° 109 *ha le sue tre radici reali.*

118. Per lo studio delle superficie di second'ordine basterebbe senza dubbio di averle comprese tutte, insieme alle loro varietà nell'equazioni (15) e (16); ma volendo compiere la discussione delle corde e dei piani principali, fa d'uopo riprendere il metodo generale del n° 109, applicandolo all'equazione più semplice

$$(14) \qquad Px^2+P'y^2+P''z^2-Qx-Q'y-Q''z+E=0,$$

la quale comprende senza eccezione tutte le superficie di second'ordine (n° 111).

Cercando primieramente il piano diametrale coniugato colle corde parallele alla retta qualunque

$$(17) \qquad x=mz=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}z,\ y=nz=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}z,$$

si troverà col solito metodo del n° 105,

$$(18) \quad (2Px-Q)\cos\alpha+(2P'y-Q')\cos\beta+(2P''z-Q'')\cos\gamma=0.$$

Quindi, perchè questo piano e la corda (17) fossero per-

pendicolari tra loro, importa (n.° 48) soddisfare alle tre condizioni (*)

$$(19)\quad \begin{cases} P\cos\alpha\ \cos\gamma = P''\cos\alpha\ \cos\gamma\ , \\ P'\cos\beta\ \cos\gamma = P''\cos\beta\ \cos\gamma\ , \\ P\cos\alpha\ \cos\beta = P'\cos\beta\ \cos\alpha\ , \end{cases}$$

le quali non possono essere verificate ad un tempo, quando P, P', P'' sono diseguali, se non che per mezzo di uno dei sistemi dei valori che seguono:

$$(20)\quad \begin{cases} \cos\alpha = 0 \text{ con } \cos\beta = 0, \\ \cos\alpha = 0 \ \ldots\ \cos\gamma = 0, \\ \cos\beta = 0 \ \ldots\ \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Or questi valori provano, 1° che vi esistono tre sistemi di corde principali *sempre reali e perpendicolari tra loro*, essendo essi paralleli ai tre assi rettangolari OX, OY, OZ, che han ridotto l'equazione di secondo grado alla forma (14); e che non vi sono *giammai più di tre sistemi di questo genere*, finchè P, P', P'' sono diseguali.

2.° Che i piani principali coniugati con questi tre sistemi di corde, e dedotti dall'equazione (18), sono:

$$(21)\qquad 2P''z - Q'' = 0\ ,$$
$$(22)\qquad 2P'y - Q' = 0\ ,$$
$$(23)\qquad 2Px - Q = 0\ ;$$

ma l'ultimo sarà situato ad una distanza infinita $x = \frac{Q}{2P}$, se $P = 0$, il che accade nelle superficie della forma (16). E questo procede evidentemente dacchè le corde parallele ad OX non incontrano la superficie che in un sol punto, e si prolungano indefinitamente nell'altro verso.

119. Se si avesse nel tempo stesso $P = 0$ e $Q = 0$, questo piano principale (23) perpendicolare ad OX si trovereb-

(*) Ordinariamente si esprime soltanto che due delle proiezioni della retta sono perpendicolari alle tracce del piano, ma fa d'uopo allora, giusta l'osservazione fatta nel n. 46, evitare di prendere due piani proiettanti che coincidono. Ora siccome questa circostanza avrebbe frequentemente luogo quì, ove le corde richieste si rattrovano parallele ad uno degli assi coordinati, così è più semplice di stabilire immediatamente la tre condizioni, una delle quali sarà sempre compresa nelle altre due.

*

be ad una distanza indeterminata. Difatti la superficie diviene in tal caso (n° 114) un cilindro ellittico o iperbolico; e le corde parallele ad OX, ovvero all'asse del cilindro, prolungandosi indefinitamente nei due versi, i loro punti medi si possono prendere a piacere su di ogni piano perpendicolare alla loro comune direzione.

120. Supponiamo ora che due dei coefficienti P, P', P'', siano eguali, per esempio $P=P'$. Allora soddisferemo alle condizioni (19) in un modo più generale che per mezzo dei valori (20). Potrà porsi bensì $\cos\alpha=0$ con $\cos\beta=0$, il che fa ritrovare il sistema delle corde parallele ad OZ col piano principale (21); ma basterà pure supporre $\cos\gamma=0$ lasciando α e β indeterminate, ciò che mostra che *tutte le corde parallele al piano* XY *appartengono a dei sistemi principali*, il cui numero è per conseguenza infinito. I piani principali corrispondenti sono somministrati dall'equazione (18) con sostituirvi il valore $\cos\gamma=0$, il che dà

$$(24) \qquad x\cos\alpha+y\cos\beta-\frac{Q\cos\alpha+Q'\cos\beta}{2P}=0.$$

Questo caso à luogo quando la superficie (14) è di *rivoluzione;* giacchè tutt'i piani $z=h$, $z=h'$,..... tagliano allora questa superficie secondo cerchi, i cui centri sono allogati evidentemente su di una stessa retta parallela all'asse OZ, cioè:

$$x=\frac{Q}{2P}, \quad y=\frac{Q'}{2P}.$$

Questa retta è inoltre la intersezione comune di tutt'i piani principali rappresentati dall'equazione (24).

121. Se si supponesse ad un tempo $P=P'=P''$, le condizioni (19) si troverebbero verificate da per loro stesse, qualunque fossero i valori di α, β, γ; d'onde risulta che in tal caso ogni sistema di corde parallele sarebbe un sistema principale; ed ogni piano della forma (18), vale a dire che passi pel punto

$$x_1=\frac{Q}{2P}, \quad y_1=\frac{Q'}{2P}, \quad z_1=\frac{Q''}{2P},$$

sarebbe un piano principale. In tal caso la superficie è una

sfera, potendo l'equazione (14) scriversi sotto la forma

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\frac{Q^2+Q'^2+Q''^2-4EP}{4P^2},$$

la quale esprime che la distanza del punto (x_1,y_1,z_1) da ciascun punto della superficie è una quantità costante.

122. Allorquando due dei coefficienti P e P'' sono eguali e nulli nel tempo stesso, si sa (n° 115) la superficie essere un cilindro parabolico. Trovasi allora, come nel n° 120, un sistema di corde principali parallele ad OZ, con un piano principale corrispondente, cioè

(21) $$2P''z-Q''=0:$$

quindi un numero infinito di corde principali parallele ad XY ed indeterminate nella loro direzione; ma i piani coniugati di questi sistemi, rappresentati dall'equazione (24), sembrano tutti situati all'infinito. Nondimeno se ne troverà uno situato a distanza finita, o piuttosto arbitraria, scegliendo α e β in modo che si abbia

$$Q\cos\alpha+Q'\cos\beta=0;$$

il che suppone che si prendano delle corde parallele alle generatrici del cilindro, ed il piano principale (24) diviene perciò quello della *sezione retta*. È agevole rendersi ragione di queste diverse circostanze, per via di considerazioni geometriche, ed interpetrare in un modo analogo il caso di due piani paralleli, il quale si verifica quando si suppongono nulli P, P', Q e Q'.

123. Risulta dalle precedenti discussioni, 1.° che in tutte le superficie di second' ordine i sistemi di corde principali sono al numero di tre, distinti e rettangolari tra loro; oppure il loro numero è infinito, e l'uno è allora perpendicolare a tutti gli altri; salvo nel caso della sfera, in cui tutte le direzioni possibili danno corde principali.

2.° I piani principali sono bensì in numero di tre, o pure in numero infinito; ma in tutt' i casi, *due almeno di questi piani* sono a distanza finita.

CAPITOLO VII.

DISCUSSIONE DELLE SUPERFICIE DOTATE DI UN CENTRO.



124. Le superficie di questa classe vanno tutte racchiuse (n° 117) nell'equazione

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=+H,$$

che dà luogo a diversi *generi*, secondo i segni da cui si trovano affetti i coefficienti; ma per rendere breve la discussione senza omettere alcun caso realmente distinto, supporremo che si abbia avuto sempre cura precedentemente di rendere *positivo* il secondo membro H della proposta equazione; e siccome allora non potrebbero i tre quadrati avere nel tempo stesso coefficienti negativi senza che la superficie fosse immaginaria, così non ci resterà che esaminare i *tre generi* compresi nei casi seguenti.

125. Ellissoide. *Tre quadrati positivi.* L'equazione coi segni espliciti conserva la forma

$$(1) \qquad Px^2+P'y^2+P''z^2=H;$$

e per ottenere i punti in cui la superficie incontra gli assi coordinati, si pareggeranno a zero due delle variabili x,y,z e si troveranno *sei vertici reali* A ed A', B e B', C e C', (*fig.* 18), situati alle distanze

$$x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=a,\quad y=\pm\sqrt{\frac{H}{P'}}=b,\quad z=\pm\sqrt{\frac{H}{P''}}=c.$$

Queste distanze $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, si chiamano i *semiassi* o *i semi-diametri principali* (n° 104) della superficie; essendochè ciascuna di queste rette è l'intersezione di due piani coordinati, che qui sono piani *principali* (n° 117). Se introdurremo inoltre questi semiassi (che sovente diconsi anche assi) nell'equazione (1), sostituendovi i valori di P, P', P'', tratti dalle precedenti relazioni, questa equazione prenderà la forma semplice e simmetrica

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

126. Le sezioni parallele al piano XY saranno date dall' equazioni simultanee

$$z=\pm h, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2};$$

e scorgesi essere queste sempre *ellissi simili*, poichè i loro *assi*, che si ottengono ponendo a vicenda $x=0$, $y=0$ nell' ultima equazione, conservano tra loro un rapporto costante, qualunque sia h. Quest' ellissi divengono immaginarie, quando $h^2>c^2$; talchè la superficie non si estende al di sopra del punto C, nè al di sotto del punto C'. Simiglianti conseguenze si ottengono per le sezioni parallele al piano XZ, o al piano YZ; e generalmente *ogni piano ad arbitrio dà una sezione ellittica*, giacchè l' equazione

$$z=mx+ny+k,$$

combinata con (1) conduce a

$$(P+P''m^2)x^2+(P'+P''n^2)y^2+2P''mnxy+\ldots.=0,$$

risultamento in cui la condizione $B^2-4AC<0$ trovasi manifestamente adempiuta. L' ellissoide è dunque una *superficie chiusa* in tutt' i versi.

127. Allorquando due qualunque dei coefficienti sono eguali, per esempio, $P=P'$ ovvero $a=b$, l' ellissoide è di rivoluzione intorno l' asse delle z; essendochè le sezioni trovate (n° 126) e prodotte da piani perpendicolari a quest' asse, come $z=h$, divengono allora dei cerchi, i cui centri sono sulla OZ. Cosicchè in tal caso la superficie potrebb' essere generata dalla rotazione della ellisse CAC' intorno all' asse CC'.

128. Se si suppone $P=P'=P''$, ovvero $a=b=c$, l' ellissoide si cambia in una sfera, poichè l' equazione (2) diviene

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

la quale esprime che la distanza dell' origine da un punto qualunque della superficie è costantemente eguale ad a.

È qui a proposito di fare osservare che una sfera di raggio R, ed il cui centro fosse allogato nel punto che ha per coordinate α, β, γ, avrebbe per equazione

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2;$$

giacchè il primo membro di questa equazione esprime (n° 6)

il quadrato della distanza del punto (α,β,γ) da un punto qualunque (x,y,z) della superficie.

128. *Iperboloide ad una falda* (a). *Un sol quadrato negativo.*

L'equazione coi segni espliciti diviene

$$(3) \qquad Px^2+P'y^2-P''z^2=H,$$

ed i punti, in cui la superficie incontra gli assi coordinati, sono somministrati da

$$x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=a,\ y=\pm\sqrt{\frac{H}{P'}}=b,\ z=\pm\sqrt{\frac{H}{-P''}}=c\sqrt{-1};$$

donde deducesi esservi qui *quattro vertici reali* A *ed* A', B *e* B' (*fig.*19), *e due vertici immaginari*. Le distanze $OA=a$ $OB=b$, $OC=c$ chiamansi ancora, per le stesse ragioni del del n° 125, *semidiametri principali* ovvero *semiassi* della superficie; ma i due primi diconsi *assi reali*, ed il terzo non è che il coefficiente dell'espressione dataci dall'analisi per l'*asse immaginario*.

Introducendo questi assi a,b,c in luogo di P,P',P'' nell'equazione (3), essa prenderà la forma

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

129. Le sezioni parallele al piano XY son date dall'equazioni simultanee

$$z=\pm h,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2};$$

cosicchè queste curve sono *ellissi*, sempre *simili*, poichè i due assi, che si ottengono ponendo successivamente $y=0$, $x=0$ nella precedente equazione, conservano tra loro un rapporto costante, qualunque sia h. Inoltre le dimensioni di

---

(a) Altri, siccome il nostro Bordoni, dicono *ad una foglia;* e se noi non avessimo già usato il primo modo di dire nel riprodurre la *Geometria Descrittiva* del sig. Leroy, saremmo proclivi a seguire l'illustre geometra italiano, parendoci la voce *foglia* convenir meglio che *falda* per esprimere le diverse parti di una superficie, dopo l'uso generalmente invalso di chiamar *rami* le diverse parti di una curva.

queste ellissi aumentano indefinitamente insieme al valore assoluto di h; per modo che la più piccola di queste sezioni orizzontali, chiamata *ellisse di gola*, si otterrà ponendo $z=0$ nell'equazione (4); e questa è la curva $ABA'B'$, che ha per diametri principali i *due assi reali* a e b della iperboloide.

Quanto al piano XZ, esso taglia la superficie secondo una *iperbole* ($EAF, E'A'F'$) la cui equazione deducesi da (4) ponendovi $y=0$; e simiglianti risultamenti hanno luogo per lo piano YZ, come pei piani paralleli ad ognuno di essi.

130. Rilevasi da ciò che questa *iperboloide* si estende indefinitamente, ma che si compone di *una sola falda* continua, sulla quale si può passare da un punto qualunque ad un altro senza uscire dalla superficie. Inoltre la sezione fatta da un piano qualunque

$$z=mx+ny+k,$$

può essere a vicenda una ellisse, una parabola, od una iperbole, secondo la inclinazione del piano segante; imperocchè questa equazione combinata con (3) conduce a

$$(P-P''m^2)x^2+(P'-P''n^2)y^2-2P''mnxy+\ldots=0,$$

risultato in cui il binomio caratteristico B^2-4AC può trovarsi positivo, nullo, o negativo a seconda dei valori di m ed n.

131. Allorquando i *due assi reali* sono eguali, vale a dire $a=b$, ovvero $P=P'$, l'iperboloide riesce di rivoluzione intorno all'asse immaginario OZ, essendochè le sezioni ottenute nel n° 129, per mezzo di piani $z=h$ perpendicolari a quest'asse, divengono evidentemente cerchi i cui centri sono in questa retta. E in tal caso la superficie può generarsi mediante la rotazione della iperbole EAF intorno al suo asse *immaginario*.

132. *Iperboloide a due falde. Due quadrati negativi.* L'equazione diviene, mettendo i segni in evidenza,

$$(5) \qquad Px^2-P'y^2-P''z^2=H.$$

La superficie incontra gli assi coordinati alle distanze

$$x=\pm\sqrt{\frac{H}{P}}=a,\quad y=\pm\sqrt{\frac{H}{-P'}}=b\sqrt{-1},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{H}{-P'}}=c\sqrt{-1};$$

per modo che non vi sono qui che *due vertici reali* A, ed A' (*fig.* 20), e gli altri quattro sono immaginari; ma le distanze $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ appellansi tuttavia (n° 104) i *semi-diametri principali* ovvero i *semiassi* della superficie, ed il primo dicesi *asse reale*, giacchè è il solo che la incontri effettivamente. Introducendo questi tre assi a,b,c, in vece di P,P',P'', nell'equazione (5), essa prende la forma

$$(6) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

133. La condizione $y=0$, introdotta nell'equazione (6) mostra che il piano XZ taglia la iperboloide secondo una iperbole (EAE', $FA'F'$); e lo stesso accade pel piano XY, e per altri paralleli a ciascuno di essi. Ma per i piani seganti paralleli ad YZ, o perpendicolari all'asse reale OX, si ottiene

$$x=\pm h, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{h^2}{a^2}-1;$$

talchè queste sezioni sono ellissi *simili* tra loro, che crescono indefinitamente insieme alla grandezza assoluta di h; ma divengono immaginarie quando $h^2<a^2$, vale a dire nell'intervallo dei due vertici reali A ed A'.

134. Da quanto precede risulta che questa iperboloide si compone di *due falde* non contigue, indefinite ciascuna in un verso, ma separate l'una dall'altra da un intervallo in cui non esiste alcun punto della superficie. Un piano segante qualunque potrebbe anche produrre, come nel n° 130, sezioni talora ellittiche, talora paraboliche, o iperboliche a seconda della sua inclinazione sugli assi.

135. La iperboloide a due falde riesce di *rivoluzione*, quando i due *assi immaginari* sono eguali, vale a dire quando $b=c$, ovvero $P'=P''$, giacchè le sezioni ottenutesi nel n° 133 per mezzo di piani $x=h$ perpendicolari all'asse reale OX, divengono evidentemente cerchi, i cui centri sono su quest'asse. Allora la superficie potrebbe venir generata dalla rivoluzione della iperbole (AE, $A'F$) intorno al suo asse *reale* $A'OA$.

136. Ecco i *tre generi* principali di superficie dotate di un centro; ma rimangono ad esaminarsi talune varietà, e primieramente il caso in cui $H=0$.

Questa ipotesi riduce l'equazione (1) della ellissoide a

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=0,$$

la quale non può essere verificata da altri valori reali che $x=0$, $y=0$, e $z=0$; in questo caso adunque la superficie riducesi ad un punto unico, che è l'origine delle coordinate.

137. Nella iperboloide ad una falda, la supposizione $H=0$ riduce l'equazione (3) a

$$(7) \qquad Px^2+P'y^2-P''z^2=0,$$

la quale rappresenta una *superficie conica VOV'* il cui vertice è all'origine. Per rendersene certi, basta vedere se un piano qualsivoglia condotto per questo punto dia sezioni rettilinee. Ora, combinando $z=mx+ny$ coll'equazione (7) si ottiene

$$(P-P''m^2)x^2+(P'-P''n^2)y^2-2P''mnxy=0,$$

equazione omogenea che condurrà necessariamente a valori della forma

$$\frac{y}{x}=p\pm\sqrt{q};$$

il qual risultato appartiene di fatti a *due rette che passano per l'origine* delle coordinate, o pure al punto unico ($x=0$, $y=0$) quando il radicale diverrà immaginario per talune posizioni del piano segante.

D'altronde l'ipotesi $z=h$, ammessa nell'equazione (7) mostra che il cono ha per base parallela al piano XY una ellisse il cui centro è sulla OZ; ma conviene generalmente riguardarlo come un cono *di secondo grado*, la cui base può essere una delle tre curve di quest'ordine.

Questa superficie conica VOV' è *asintoto* della iperboloide ad una falda; giacchè paragonando le ordinate z e z' che nell'equazioni (3) e (7) corrispondono alle stesse x ed y, e sulla medesima falda, trovasi

$$\sqrt{P''}.(z'-z)=\sqrt{Px^2+P'y^2}-\sqrt{Px^2+P'y^2-H},$$

ovvero, moltiplicando e dividendo il secondo membro per la somma dei radicali,

$$\sqrt{P''}.(z'-z)=\frac{H}{\sqrt{Px^2+P'y^2}+\sqrt{Px^2+P'y^2-H}}.$$

Dunque la differenza $z'-z$ decresce *indefinitamente* fino a zero a misura che x ed y aumentano, e siccome la z è sempre minore della z', così il cono è al di dentro dell'iperboloide.

138. Se vuolsi paragonare l'equazione (7) del cono assintotico con quella della iperboloide sotto la forma

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

bisogna osservare che in questa superficie le lunghezze assolute degli assi sono

$$a=\sqrt{\frac{H}{P}}\,,\; b=\sqrt{\frac{H}{P'}}\,,\; c=\sqrt{\frac{H}{P''}}\,.$$

Ora, allorquando si fa decrescere H senza cambiare P, P', P'', gli assi a,b,c decrescono al tempo stesso, ma restano sempre proporzionali alle quantità

$$\sqrt{\frac{1}{P}}\,,\; \sqrt{\frac{1}{P'}}\,,\; \sqrt{\frac{1}{P''}}\,;$$

laonde quando questi assi sono divenuti in tal modo nulli per la ipotesi di $H=0$, e la iperboloide si è cangiata in cono, le tre quantità precedenti sono benanche proporzionali alle lunghezze degli assi primitivi, e si potrà porre

$$\sqrt{\frac{1}{P}}=\alpha a,\; \sqrt{\frac{1}{P'}}=\alpha b,\; \sqrt{\frac{1}{P''}}=\alpha c\,;$$

donde risulta

$$P=\frac{1}{\alpha^2 a^2}\,,\; P'=\frac{1}{\alpha^2 b^2}\,,\; P''=\frac{1}{\alpha^2 c^2}\,:$$

valori i quali sostituiti in (7), ricondurranno questa equazione alla forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

139. Fatta la ipotesi di $H=0$ nella equazione (5) della iperboloide a due falde, essa riducesi a

$$(8) \qquad Px^2-P'y^2-P''z^2=0;$$

e si dimostrerà (*fig.* 20), come nel n° 137, che questa equazione rappresenta *una superficie conica* VOV' la cui

base parallela ad YZ è una ellisse. Questo cono è ancora *assintoto* della iperboloide a due falde, ma esso inviluppa *esteriormente* quest' ultima superficie ; giacchè paragonando le due ordinate x ed x', che in (5) ed (8) corrispondono alle medesime y e z, si ottiene

$$\sqrt{P}.(x-x')=\sqrt{P'y^2+P''z^2+H}-\sqrt{P'y^2+P''z^2},$$

ovvero, moltiplicando e dividendo il secondo membro per la somma dei radicali,

$$\sqrt{P}.(x-x')=\frac{H}{\sqrt{P'y^2+P''z^2+H}+\sqrt{P'y^2+P''z^2}}:$$

dunque la differenza $x-x'$ decresce indefinitamente fino a zero, a misura che y e z si accostano all'infinito, quantunque si abbia sempre $x>x'$.

L'equazione (8) di questo cono assintotico potrebbe ancora, come nel n° 138, ricondursi alla forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

140. Le superficie coniche a base di secondo grado non sono le sole varietà che racchiudono l'equazioni generali (1), (3) e (5). Supponendo in esse nulli uno o più coefficienti P, P', P'', H, somministreranno ancora dei *cilindri* a base *ellittica* o *iperbolica*, come

$$Px^2+P'y^2=H,\ \text{o}\ Px^2-P'y^2=H;$$

ed anche il sistema di *due piani* che si tagliano, o che sono paralleli, come

$$Px^2-P'y^2=0,\ \text{o pure}\ Px^2=H;$$

ma questi diversi casi non richiedendo veruna discussione, ci basterà di averli indicati.

141. Delle generatrici rettilinee. Facciamoci ad esaminare se fra le superficie dotate di un centro, ed oltre alle coniche o cilindriche, ve n'ha qualcuna sulla quale una retta possa essere applicata in tutta la sua lunghezza indefinita. Effettuiamo questa ricerca specialmente per la iperboloide ad una falda, essendo agevole il provare che la forma delle due altre superficie non permette ch'esse godano di questa proprietà ; oltre a che basterà cambiare il se-

gno del quadrato di un asse, per applicare a queste i risultamenti ottenuti per l'altra.

L'iperboloide ad una falda (n° 128) ha per equazione

$$(9)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Se esiste una retta che possa applicarsi per intera su questa superficie, una delle sue proiezioni sarà della forma

$$(10)\qquad y=\alpha x+\beta,$$

ove α, β sono costanti indeterminate; e siccome questa equazione rappresenta nel tempo stesso il piano proiettante della retta, bisognerà che tagliando la superficie con questo piano, l'intersezione, la quale sarà una linea di secondo grado, abbia una equazione che possa decomporsi in due fattori di cui uno sia *lineare*, e quindi l'altro egualmente. Ora la combinazione dell'equazioni (9) e (10) dà per la proiezione della sezione sul piano XZ,

$$(11)\qquad \frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2(b^2+a^2\alpha^2)+2\alpha\beta a^2x+a^2(\beta^2-b^2)}{a^2b^2};$$

ma essendo il primo membro un quadrato perfetto, converrà per la enunziata decomposizione che il secondo membro sia bensì un quadrato; laonde importa stabilire tra le indeterminate α e β la relazione

$$(b^2+a^2\alpha^2)(\beta^2-b^2)a^2=\alpha^2\beta^2a^4,$$

donde deducesi

$$\beta=\pm\sqrt{b^2+a^2\alpha^2};$$

valore sempre reale, il quale sostituito nell'equazioni (10) ed (11) dà per proiezioni della retta richiesta,

$$(12)\qquad y=\alpha x+\sqrt{b^2+a^2\alpha^2},$$

$$(13)\qquad \pm\frac{z}{c}=\frac{x\sqrt{b^2+a^2\alpha^2}+a^2\alpha}{ab}.$$

Il radicale che quivi entra, racchiude implicitamente il doppio segno del valore di β, ma bisognerà assumerlo sempre collo stesso segno nelle due equazioni nel tempo stesso. Non avendo d'altronde a soddisfarsi che ad una sola relazione tra β ed α, l'ultima di queste costanti resta affatto *arbitraria* nell'equazioni (12) e (13); e per conseguenza ***esistono infinite rette situate interamente sulla iperboloide ad una falda.***

142. È qui da osservarsi che per applicare questi risultamenti alla ellissoide o alla iperboloide a due falde, basterebbe nell'equazione (9) cambiare c in $c\sqrt{-1}$, ovvero b in $b\sqrt{-1}$; e siccome ciascuna di queste modificazioni renderebbe immaginaria l'equazione (13), devesi conchiudere che queste due superficie non ammettono alcuna generatrice rettilinea.

143. Ritorniamo alla iperboloide ad una falda, e per esaminare la posizione che vi occupano le diverse rette, rappresentiamo questa superficie proiettata da una parte su di un piano orizzontale, parallelo ai due assi reali a e b che sono nel piano coordinato XY, e dall'altra su di un piano verticale parallelo ai due assi a e c situati nel piano XZ. Per eseguire queste proiezioni basta delineare sul piano orizzontale i due assi $Oa=a$, $Ob=b$ (*fig.* 21), e tracciare l'ellisse di gola abg; quindi sul piano verticale portando ad una altezza qualunque i due assi $O'a'=a$, $O'C'=c$, si descriverà la iperbole principale $D''a'D'$ che trovasi nel piano verticale OD. E se inoltre, per meglio fissare le idee, si suppone la iperboloide terminata ai due piani orizzontali $D'H'$, $D''H''$, egualmente distanti dal centro, questi due piani taglieranno la superficie secondo ellissi eguali, proiettate l'una e l'altra sopra DEH, e simili alla ellisse di gola abg.

144. Ciò posto, l'equazioni (12) e (13), la seconda delle quali racchiude un doppio segno, danno per ciascun valore attribuito ad α, due rette che hanno una proiezione orizzontale comune, e sono per conseguenza allogate in un medesimo piano verticale: ma le loro proiezioni su di XZ essendo due rette distinte, $A'A''$ e $B'B''$, si possono ordinare tutte le linee che corrispondono ai diversi valori $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots\ldots$ in *due sistemi* (A) e (B), distinti dal segno che affetta le loro proiezioni sul piano XZ, cioè:

$$(A)\ \begin{cases} y=\alpha x+\sqrt{b^2+a^2\alpha^2} \\ +\dfrac{z}{c}=\dfrac{x\sqrt{b^2+a^2\alpha^2}+a^2\alpha}{ab}, \end{cases} \qquad (B)\ \begin{cases} y=\alpha x+\sqrt{b^2+a^2\alpha^2} \\ -\dfrac{z}{c}=\dfrac{x\sqrt{b^2+a^2\alpha^2}+a^2\alpha}{ab}, \end{cases}$$

$$(A_1)\ \begin{cases} y=\alpha' x+\sqrt{b^2+a^2\alpha'^2} \\ +\dfrac{z}{c}=\dfrac{x\sqrt{b^2+a^2\alpha'^2}+a^2\alpha'}{ab}, \end{cases} \qquad (B_1)\ \begin{cases} y=\alpha' x+\sqrt{b^2+a^2\alpha'^2} \\ -\dfrac{z}{c}=\dfrac{x\sqrt{b^2+a^2\alpha'^2}+a^2\alpha'}{ab}, \end{cases}$$

(A_2) . . . . (B_2) . . . .

. . . .

Ora egli è agevole lo scorgere, che *tutte le proiezioni orizzontali* di queste diverse rette *sono delle tangenti alla ellisse di gola abg*, come AB_1, AB_2, ... Di fatti, se si combina l'equazione

(12) $$y = \alpha x + \sqrt{b^2 + a^2\alpha^2},$$

con quella di questa ellisse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

che deducesi da (9) ponendo ivi $z=0$, si troverà per le ascisse dei punti di sezione

$$(b^2 + a^2\alpha^2)x^2 + a^4x^2 + 2a\alpha x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} = 0.$$

Ma questa equazione essendo un quadrato perfetto, ha le sue due radici eguali; per conseguenza la retta (12) è una secante, che avendo confusi i due punti di sezione, è per verità tangente all'ellisse *abg*, qualunque sia il valore attribuito ad α.

Avverasi parimente che per tutt'i valori di α, le proiezioni

(13) $$\pm \frac{z}{c} = \frac{x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2} + a^2\alpha}{ab},$$

sono due rette $A'A''$ e $B'B''$, tangenti alla iperbole principale $D''a'D'$ che ha per equazione $a^2z^2 - c^2x^2 = a^2c^2$; e quando si pone $\alpha = 0$, il che ha luogo pel piano verticale A_2B_2, queste proiezioni divengono gli assintoti di questa iperbole, giacchè rimane $z = \pm \frac{c}{a}x$.

145. Se per l'origine delle coordinate, che è centro della iperboloide, conduconsi delle parallele alle diverse rette del sistema (A) o a quelle del sistema (B), si formerà una superficie conica, un lato qualunque della quale verrà rappresentato da

$$y = \alpha x \quad \text{e} \quad \pm \frac{z}{c} = \frac{x\sqrt{b^2 + a^2\alpha^2}}{ab};$$

quindi, se si elimina α che varia passandosi da un lato all'altro, si avrà per l'equazione di questo cono

(14) $$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

la quale coincide colla equazione del cono assintoto trovato

nel n° 138. Donde ritraesi che *tutte le rette situate sulla iperboloide sono rispettivamente parallele ai lati del cono asintoto di questa superficie.*

146. Segue da ciò che *tre rette qualunque* della iperboloide *non sono mai parallele ad un medesimo piano.* Di fatti se fosse altrimenti, vi sarebbero tre lati del cono assintoto allogati in un medesimo piano, il quale dovrebbe in tal caso tagliare la base *ellittica* (n° 137) del cono in *tre punti situati in linea retta*; risultamento che non si accorda colla forma delle curve di secondo grado. Questa osservazione ci sarà utile più tardi, per distinguere l'attuale superficie dalla paraboloide iperbolica.

147. *Due rette qualunque* del sistema (A), come (*fig.* 21) ($AM, A'M'$) ed (A_1M_1, $A'_1M'_1$), *non sono giammai in un medesimo piano.* Coi fatti, il punto K, in cui si tagliano le loro proiezioni orizzontali, trovasi per la prima al di là di M per rispetto al piede A di questa retta, e per conseguenza nello spazio esso è al di sopra dell'ellisse di gola; laddove il punto R della seconda retta A_1M_1 è palesemente al di sotto di questa ellisse: onde queste due rette di un medesimo sistema non si tagliano. Esse inoltre non sono punto parallele, giacchè le loro proiezioni orizzontali generalmente s'intersecano; e quando anche si paragonassero le due tangenti agli estremi di un diametro della ellisse di gola, queste due rette si troverebbero nello spazio inversamente situate per rispetto al piano verticale condotto per questo diametro, di modo che non potrebbero affatto essere parallele.

L'analisi conduce alla medesima conseguenza, essendochè combinandosi le quattro equazioni (A) ed (A_1) del n° 144, col sottrarle a due a due, si perviene dopo l'eliminazione delle variabili alla condizione $(\alpha-\alpha')^2=0$, la quale non potrebbe venir soddisfatta finchè le rette sono distinte l'una dall'altra. In verità, per quelle che passerebbero per gli estremi di uno stesso diametro dell'ellisse di gola, si avrebbe $\alpha=\alpha'$; ma in tal caso è evidente doversi adottare pel radicale segni contrari nell'equazioni (A) ed (A_1), e sotto questa novella forma la loro combinazione condurrebbe a $\sqrt{b^2+a^2\alpha^2}=0$: condizione del pari impossibile.

La stessa relazione ha luogo chiaramente tra le rette del sistema (B), *che non sono giammai situate a due a due in uno stesso piano.*

148. Per lo contrario *una retta qualunque del sistema* (A) *taglia tutte le linee* (B), (B_1), (B_2),... *dell'altro sistema*. Ciò è evidente per ($AM,A'M'$) e ($BM,B'M'$) che sono nello stesso piano verticale, e si tagliano in (M,M') sull'ellisse di gola: paragoneremo dunque la prima di queste rette con (B_1M_1, $B'_1M'_1$). I punti proiettati in R son situati, per ambedue queste rette, *al di sopra* dell'ellisse di gola, perchè R è al di là dei punti di contatto M ed M_1; e siccome la verticale innalzata da R non può intersegare la falda *superiore* della superficie che in un sol punto R'', questo punto è necessariamente comune alle due rette (A) e (B_1). *Due rette di sistemi differenti son dunque sempre in un medesimo piano*, e solamente divengono *parallele* quando passano per le estremità di un diametro della ellisse di gola. L'analisi conduce alla stessa conseguenza; poichè la combinazione delle quattro equazioni (A) e (B_1) del n° 144, conduce a due valori di x che si accordano tra essi.

149. Si chiama *superficie storta* ogni superficie *generata da una retta che si move per guisa, che due posizioni successive di essa non sono giammai in un medesimo piano;* e questo è ciò che avviene (al di più dei casi generali di cui sarà parola in appresso) quando la retta mobile A è condizionata ad appoggiarsi costantemente su tre rette fisse B,B',B'' (*fig.* 21 *bis.*), le quali, a due a due, non sono in uno stesso piano. Sulle prime io dico che questa condizione basti a regolare il movimento della generatrice A; poichè se per ciascun punto M preso nella retta B si concepiscano passar due piani, uno per M e per la retta B', l'altro per M e per la retta B'', l'intersezione di questi piani darà una retta sola, che certo si appoggerà sulle tre *direttrici*. Dico inoltre che la superficie sarà storta, perchè due posizioni qualunque A ed A' della generatrice non potrebbero essere in un medesimo piano, senza che le rette B, B', B'', ciascuna delle quali à due punti comuni con A e con A', non fossero ancor esse in questo piano: il che è contrario alla ipotesi.

150. Ora l'iperboloide ad una falda, considerata come luogo di tutte le rette (A), (A_1), (A_2),... o (B), (B_1), (B_2)..., del n° 144, appartiene al genere di superficie storte, di cui abbiamo parlato. Difatti in ciascun sistema le rette non s'in-

contrano (n° 147); e altronde poichè (A), a ragion di esempio, intersega (n° 148) tutte le rette dell'altro sistema, basta scegliere a piacere tre di queste, (B), (B_1), (B_2), e poscia supporre che la retta (A) si muove appoggiandosi ad esse: allora questa retta non potrà prendere (n° 149) che le posizioni successive (A_1). (A_2),... le quali adempiono già la condizione di appoggiarsi alle tre direttrici: il perchè, la retta mobile (A) genererà per tal modo l'iperboloide in quistione. E questa superficie ammette bensì *una seconda maniera di generazione*, in cui la retta (B) scorrerebbe appoggiata su tre rette qualunque (A), (A_1), (A_2) del primo sistema.

151. Viceversa, quando una retta mobile G si appoggia di continuo a tre rette fisse B,B',B'', le quali a due a due non sono in uno stesso piano, la superficie così descritta è sempre una iperboloide ad una falda, bene inteso che le tre direttrici non siano ***parallele ad un medesimo piano;*** perocchè, senza quest'ultima restrizione la quale trovasi verificata (n° 146) dalle rette dell'iperboloide, la superficie si cangerebbe in una delle paraboloidi, e ne sarà parola nel n° 176.

Sotto le ammesse condizioni è sempre possibile condurre, per un punto qualunque dello spazio, tre assi coordinati obliqui, rispettivamente paralleli alle tre direttrici; ma per rendere manifesta la posizione di un punto notevole della superficie, noi prenderemo per origine delle coordinate il centro del parallepipedo costruito nel modo seguente. Per la retta B (*fig.* 14) meniamo un piano BCD parallelo a B'', e per B' un piano $B'EF$ anche parallelo a B'': questi due piani, essenzialmente diversi per le condizioni ammesse di sopra, si taglieranno in una retta A'' evidentemente parallela a B''. In simil modo per B e per B'' immaginiamo due piani BCF, e $B''HK$ paralleli a B', i quali s'incontreranno in una retta A' parallela a B'; e da ultimo per B' e per B'' immaginiamo pure due piani $B'EI$ e $B''HF$ paralleli a B, la cui intersezione sarà una retta A parallela a B. Da questi sei piani emergerà al certo un parallepipedo, e nel centro di esso noi porremo l'origine delle coordinate, conducendo l'asse OX parallelo a B, l'asse OY parallelo a B', e l'asse OZ parallelo a B''.

152. Ciò posto, dinotando con 2α, 2β, 2γ le lunghezze

*

di tre lati contigui del nominato parallepipedo, l'equazioni delle tre direttrici saranno evidentemente

$$(B'')\quad \begin{cases} x = +\alpha, \\ y = -\beta; \end{cases}$$

$$(B')\quad \begin{cases} z = +\gamma, \\ x = -\alpha; \end{cases}$$

$$(B)\quad \begin{cases} y = +\beta, \\ z = -\gamma. \end{cases}$$

La generatrice mobile sarà rappresentata da

$$(G)\qquad x = mz + p\,,\; y = nz + q\,;$$

ma dovendo esprimere analiticamente le condizioni che questa linea à sempre un punto comune con (B''), con (B'), e con (B), avremo pure (n° 25)

$$(15)\qquad (\alpha - p)\,n + (\beta + q)\,m = 0,$$

$$(16)\qquad \alpha + m\gamma + p = 0,$$

$$(17)\qquad \beta + n\gamma - q = 0.$$

Le quattro costanti m, n, p, q trovandosi così legate da tre relazioni, una sola di esse, per esempio m, può riguardarsi come arbitraria. Se dunque si attribuissero alla medesima diversi valori successivi, $m = 1, = 10, = 12, \ldots$ e si calcolassero i valori corrispondenti di n, p, q, per sostituirli in (G), si avrebbero l'equazioni di altrettante situazioni particolari della generatrice; ma se, per contrario, si eliminano m, n, p, q tra le cinque equazioni precedenti, il risultato darà fra x, y, z una relazione la quale conviene ad un tempo a tutte le posizioni della generatrice, e che sarà in conseguenza l'equazione del luogo geometrico generato dalla retta mobile. Ora l'equazioni (16), (17), e (G) danno, combinandole a due a due,

$$m = \frac{x+\alpha}{z-\gamma},\; p = \frac{-\alpha z - \gamma x}{z-\gamma},\; n = \frac{y-\beta}{z+\gamma},\; q = \frac{\beta z + \gamma y}{z+\gamma}\,;$$

e da questi valori sostituiti in (15) emerge

$$(18)\qquad \alpha yz + \beta zx + \gamma xy + \alpha\beta\gamma = 0.$$

Da ciò è palese che la superficie di cui si tratta è di secondo grado, e che l'origine delle attuali coordinate è cen-

tro di essa, perchè (n° 93) nella sua equazione la somma degli esponenti delle variabili è pari in ciascuno dei termini che ne sono affetti. Di più, siccome tra le superficie dotate di un centro, la sola *iperboloide ad una falda* ammette (n° 142) generatrici rettilinee, così l'equazione (18) deve rappresentare questa iperboloide; e difatti gli assi coordinati attuali sono evidentemente (n° 145) tre lati del cono asintoto di questa superficie (*).

153. D'altra parte la forma simmetrica dell'equazione (18) manifesta chiaramente l'esistenza del secondo modo di generazione, che nel n° 150 abbiamo riconosciuto nell'iperboloide. Infatti, se si prendono per direttrici della retta mobile (G) del n° 151 le tre rette date A, A', A'', che sono i lati opposti a B, B', B'' nel parallepipedo della *fig.* 14, l'equazioni di queste nuove direttrici saranno

$$(A'')\ \begin{cases} x = -\alpha, \\ y = +\beta; \end{cases}$$

$$(A')\ \begin{cases} z = -\gamma; \\ x = +\alpha; \end{cases}$$

$$(A)\ \begin{cases} y = -\beta, \\ z = +\gamma; \end{cases}$$

e la generatrice G descriverà la *medesima superficie*, perchè l'equazione di essa può senza nuovi calcoli ottenersi col cambiamento di α, β, γ in $-\alpha, -\beta, -\gamma$ nell'equazione (18), e ciò non altera questa equazione. Di più, le tre rette A, A', A'' non sono che posizioni *particolari* della generatrice G che scorre appoggiata su B, B', B''; poichè la retta A, per esempio, incontra B' e B'', e si trova parallela a B; cosicchè può riguardarsi come appoggiata su queste tre ultime rette. *Quando, dunque, una retta si è fatta scorrere su tre altre come direttrici, si possono prendere, viceversa, tre posizioni qualunque della generatrice come nuove direttrici, e facendo scorrere su queste una delle*

(*) Il sig. G. Binet è quegli che ha fatto conoscere l'esistenza del notevole parallelepipedo qui adoperato, nommeno che quella di molti altri bensì concentrici alla iperboloide: come può vedersi nel 16° fascicolo del *Giornale della Scuola Politecnica*.

prime direttrici, verrà descritta la stessa iperboloide che si ebbe nel primo modo.

154. Se due delle direttrici, per esempio B' e B'' esistessero in un medesimo piano, la superficie si ridurrebbe, come per sè stesso è chiaro, al sistema di due piani, un dei quali sarebbe quello delle due direttrici in parola, e l'altro passerebbe pel punto comune a queste rette e per la terza direttrice. Difatti supponendo $\alpha = 0$, l'equazione (18) si decompone nelle due

$$x = 0\,,\ \beta z + \gamma y = 0.$$

Ma inutilmente si cercherebbe desumere dall'equazione (18) il caso particolare in cui le tre direttrici son parallele ad un medesimo piano, perchè allora torna impossibile il prendere tre assi coordinati paralleli a quelle direttrici. Questo caso interessante verrà discusso nel n° 179.

CAPITOLO VIII.

DISCUSSIONE DELLE SUPERFICIE MANCANTI DI CENTRO.



155. Le superficie di secondo grado che non han centro son tutte comprese nell'equazione (16) del n° 117, dove le diverse combinazioni di segni ammesse dai coefficienti, si riducono sempre alle due notate qui appresso

$$+ P'y^2 \pm P''z^2 = + Qx.$$

Difatti si può sempre rendere *positivo* il primo coefficiente P', cambiando, se non è tale, i segni a tutti i termini della data equazione. Poscia, quando Q è negativo, basta sostituire $-x'$ ad x per ridurre l'equazione alla forma precedente; or siccome questa sostituzione equivale a contare le x positive in senso opposto a quello da prima adottato, si vede che il segno di Q non può influire che sulla posizione della superficie, e non sulla forma di essa. Ecco il perchè noi ci fermeremo al caso in cui tal segno è positivo, ed allora questa classe di superficie non presenterà che *due specie* veramente distinte, e che si dicono *paraboloide ellittica* e

paraboloide iperbolica, secondo la natura delle sezioni che esse ammettono.

156. Paraboloide Ellittica. L'equazione coi segni espliciti è della forma

(1) $$P'y^2 + P''z^2 = Qx.$$

Evidentemente la superficie non incontra gli assi che nella origine delle coordinate, e la retta OX, intersezione dei piani XY ed XZ che attualmente sono i soli *principali* (n° 117), è l'asse unico e indefinito della paraboloide. I piani stessi danno per *sezioni principali* due parabole AOA', BOB' (*fig.* 22), aventi per equazioni

$$z = 0 \quad \text{ed} \quad y^2 = \frac{Q}{P'} x = px,$$

$$y = 0 \quad \text{e} \quad z^2 = \frac{Q}{P''} x = p'x;$$

e se introduconsi i loro parametri p e p' in luogo dei coefficienti P' e P'' nell'equazione (1), questa prenderà la forma omogenea e più simmetrica

(2) $$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = x, \quad \text{ovvero} \quad p'y^2 + pz^2 = pp'x.$$

157. Le sezioni parallele al piano YZ, o perpendicolari all'asse della paraboloide, sono rappresentate da

$$x = h, \text{ ed } \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = h. \qquad (3)$$

Quindi è chiaro che sono sempre ellissi, come $ABA'B'$, *simili* tra loro, perchè gli assi delle medesime che si ottengono ponendo ora $z=0$, ora $y=0$ nell'equazione (3), serbano un rapporto indipendente da h. Queste ellissi ingrandiscono indefinitamente con h, sintanto che questa quantità è positiva; ma diverrebbero *immaginarie*, se h fosse negativa: di che si raccoglie che l'attuale paraboloide non si estende dal lato delle x negative.

158. Quando $p = p'$, le precedenti ellissi (3) si mutano evidentemente in cerchi, i cui centri cadono in OX, e i piani son perpendicolari a questa retta. Allora dunque la paraboloide è *di rotazione*, e può essere generata dalla semiparabola OA o pure OB che gira intorno al suo asse OX.

159. Tagliamo ora la superficie (2) con un piano qualunque

$$z = mx + ny + h.$$

La proiezione della curva di sezione sarà

$$(p' + n^2 p) y^2 + m^2 p x^2 + 2mnpxy + \ldots = 0;$$

onde siccome il binomio caratteristico $B^2 - 4AC$ si trova essere $-4pp'm^2$, ne risulta che le sezioni prodotte nella superficie son sempre *ellissi* o *parabole*, avendo luogo quest'ultimo caso quando $m = 0$, cioè *quando il piano secante è parallelo all' asse* OX della paraboloide ellittica. Per lo che la denominazione della superficie richiama esattamente le due specie di sezioni piane che essa ammette.

160. Paraboloide iperbolica. L' equazione relativa a questo genere è, con segni espliciti,

$$(4) \qquad P'y^2 - P''z^2 = Qx.$$

La superficie non intersega gli assi coordinati che nella origine, e, del pari che nel n° 156, l'*asse* unico e indefinito di questa paraboloide è la retta OX, intersezione dei piani principali XY ed XZ. Le sezioni prodotte da questi piani sono

$$z = 0 \quad \text{ed} \quad y^2 = \frac{Q}{P'} x = px,$$

$$y = 0 \quad \text{e} \quad z^2 = \frac{-Q}{P''} x = -p'x:$$

così esse dinotano le due parabole AOA', e BOB' (*fig.* 23), la seconda delle quali avendo un parametro negativo, volge la sua concavità verso le x negative. Introducendo i parametri di queste curve nell'equazione (4), essa prende la forma omogenea e simmetrica

$$(5) \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x, \text{ ovvero } p'y^2 - pz^2 = pp'x,$$

la quale non differisce da quella della paraboloide ellittica se non pel cambiamento di p' in $-p'$; e questa relazione è molto utile per desumere le proprietà di una superficie da quelle dell' altra.

161. I piani paralleli ad YZ, o perpendicolari all'asse OX

della paraboloide iperbolica, producono in questa superficie tante iperbole rappresentate da

$$x=h,\ \text{ed}\ \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{p'}=h. \qquad (6)$$

Quindi siccome i loro assi, che si ottengono ponendo ora $z=0$, ora $y=0$ nell'equazione (6), serbano tra loro un rapporto indipendente da h, così tutte queste iperbole saranno *simili*, e ingrandiranno indefinitamente col valore assoluto di h. Quanto poi alla loro posizione, questa varierà col segno di h: infatti per un valore positivo $h=OO'$, l'equazione (6) fa vedere che l'iperbole ($GDH, G'D'H'$) à il suo asse reale $O'D$ diretto parallelamente ad OY, ed il suo asse immaginario $O'C$ diretto verticalmente; laddove per un valore negativo $h=OO''$, la stessa equazione dà una iperbole ($gch, g'e'h'$) il cui asse reale $O''c$ è verticale, e il cui asse immaginario $O''d$ è parallelo ad OY.

Altronde col porre $h=0$ nell'equazione (6), si vede che il piano YZ taglia la paraboloide secondo due rette

$$x=0,\ y=\pm z\sqrt{\frac{p}{p'}},$$

che sono gli *asintoti* comuni a tutte le iperbole precedenti, proiettate sul piano YZ.

162. Da ciò è lecito concludere che la paraboloide iperbolica è una superficie composta da una sola falda continua, che si protrae indefinitamente verso le x positive, e verso le x negative, ma la curvatura della quale presenta una forma opposta nelle dette due regioni. Di più questa superficie *non è mai di rotazione*, quando anche sia $p=p'$, come per contrario fu tale (n° 158) in questo caso la prima paraboloide. Difatti noi andiamo a dimostrare che la paraboloide iperbolica non ammette per sezione piana *veruna curva chiusa*.

163. Combinando l'equazione (5) con quella di un piano qualunque

$$z=mx+ny+h,$$

la proiezione della sezione verrà espressa da

$$(7)\qquad (p'-n^2p)\,y^2-m^2px^2-2mnpxy+\ldots=0.$$

Qui si ha $B^2-4AC=+m^2pp'$: dunque *tutte le sezioni*

piane fatte nella superficie di cui è parola, *sono iperbole o parabole;* e quest'ultimo caso ha luogo solamente quando il piano secante è parallelo all'asse OX. Per questa ragione la superficie di cui si tratta chiamasi *paraboloide iperbolica.* Nondimeno tra le iperbole devesi noverare il sistema di due rette che si tagliano, e tra le parabole vuolsi contare il caso di una sola linea retta; perchè queste varietà han luogo nell'equazione (7) quando il suo primo membro può decomporsi in due fattori razionali, o pure quando si ha nel tempo stesso $m=0$, e $p'-n^2p=0$.

In quest'ultimo caso, dove la sezione *è una sola retta*, il piano secante trovasi parallelo ad uno dei due *piani direttori*, dei quali sarà parola nel n° 171.

164. *Proprietà comuni alle due paraboloidi.* Ciascuna di queste superficie può essere generata da una delle due parabole principali, OB per esempio, che si moverebbe *parallelamente a sè stessa* (*), *e per modo che il suo vertice scorresse costantemente sull'altra parabola principale OA.*

Consideriamo primamente la paraboloide ellittica, in cui queste due curve hanno per equazioni (*fig.* 22)

$$OA \ldots . z=0 \text{ ed } y^2=px,$$
$$OB \ldots . y=0 \text{ e } z^2=p'x.$$

Quando la generatrice mobile OB sarà pervenuta in una posizione qualunque DE, il suo vertice D, di cui esprimo le coordinate con $OO'=\alpha$, $O'D=\beta$, si proietterà in O' sul piano XZ; e questa curva giacendo in un piano parallelo a quest'ultimo, conserverà in proiezione lo stesso parametro p': d'onde segue che la parabola DE avrà per equazioni

$$(8) \qquad y=\beta, \qquad (9) \qquad z^2=p'(x-\alpha).$$

Altronde il vertice D dovendosi trovar sempre nella direttrice OA, le sue coordinate $x=\alpha$, $y=\beta$, $z=0$ dovran-

(*) Con ciò si vuol dire che *due tangenti*, o *due corde* qualunque di questa curva, restano sempre parallele alle loro direzioni primitive, il che trae ad evidenza il parallelismo del piano della curva, e di più esprime che questa curva punto non rota nel suo piano mobile.

no soddisfare le equazioni di quest' ultima curva, il che darà tra le costanti arbitrarie α e β la relazione

$$(10) \qquad \beta^2 = p\alpha.$$

Ciò posto, se si attribuissero ad α diversi valori successivi, per esempio $\alpha=5$, $\alpha=6$, ... si desumerebbero da (10) i valori corrispondenti di β, e sostituendo questi valori simultanei in (8) e (9), si avrebbero l'equazioni di tale o tal'altra posizione determinata della parabola mobile DE; ma se per contrario si eliminassero le costanti α e β fra le tre equazioni (8), (9), e (10), il risultato converrebbe a tutte le posizioni della generatrice, e rappresenterebbe in conseguenza il luogo geometrico percorso da questa linea mobile.

Ora cavando da (8) e (9) i valori di α e β, per sostituirli in (10), trovasi

$$y^2 = p\left(\frac{p'x - z^2}{p'}\right), \text{ ossia } p'y^2 + pz^2 = pp'x:$$

risultato il quale coincide coll'equazione (2) del n° 156, e prova così che la superficie generata nel modo indicato di sopra, è realmente una paraboloide ellittica.

165. Quanto alla paraboloide iperbolica, in cui le due parabole principali hanno per equazioni (*fig.* 23)

$$OA \ldots\ldots z=0 \text{ ed } y^2 = px,$$
$$OB \ldots\ldots y=0 \text{ e } z^2 = -p'x,$$

si vedrà primamente per via di considerazioni affatto simili alle precedenti, che quest' ultima curva, pervenuta in una situazione qualunque DE, sarà espressa per

$$(11) \quad y=\beta, \qquad (12) \quad z^2 = -p'(x-\alpha).$$

Poscia le costanti arbitrarie $OO' = \alpha$, $O'D=\beta$, dovendo pur verificare l'equazione della parabola OA, si troveranno combinate fra loro per la relazione

$$(13) \qquad \beta^2 = p\alpha;$$

di sorta che discorrendola come qui sopra, bisognerà eliminare α e β tra l'equazioni (11), (12), e (13), ciò che dà il risultato

$$y^2 = p\left(\frac{p'x + z^2}{p'}\right), \text{ ovvero } p'y^2 - pz^2 = pp'x,$$

il quale, per la sua identità coll'equazione (5) del n° 160,

prova che la paraboloide iperbolica può essere bensì generata dalla parabola OB, dato che questa si mova parallelamente a sè stessa, e per modo che il suo vertice scorra costantemente sull'altra parabola principale OA.

166. *Nelle due paraboloidi tutti i piani diametrali son paralleli all'asse* OX *della superficie*.

Difatti paragonando l'equazione generale (1) del n° 105 coll'equazione delle superficie mancanti di centro

$$p'y^2+pz^2=pp'x,$$

dove p' può esser supposta positiva o negativa, l'equazione (3) del medesimo n° darà pel richiesto piano diametrale l'equazione

$$(14) \qquad 2np'y+2pz=mpp',$$

la quale mostra evidentemente che un tal piano è parallelo all'asse OX.

Reciprocamente, *ogni piano parallelo ad* OX, e rappresentato da una data equazione

$$(15) \qquad Ry+Tz=K,$$

sarà un piano diametrale della paraboloide, perchè identificando l'equazioni (14) e (15), si hanno per m ed n dei valori sempre ammessibili

$$m=\frac{2K}{Tp'}, \quad n=\frac{Rp}{Tp'}.$$

167. *Tutti i diametri delle paraboloidi son paralleli all'asse della superficie;* perchè queste rette sono (n° 104) le intersezioni di due piani diametrali, e noi abbiam veduto che questi piani si trovano sempre paralleli ad OX.

Reciprocamente, ogni retta parallela all'asse di una paraboloide sarà un diametro di questa superficie, perchè due piani condotti per tal retta son piani diametrali (n° 166).

168. Delle generatrici rettilinee. Trattasi di esaminare *se una retta possa esser applicata* in tutta la sua lunghezza indefinita *su di una paraboloide;* e siccome la forma limitata della paraboloide ellittica fa conoscere bastantemente che questa superficie non può godere di tal proprietà, e altronde basta cangiare il segno di p' affine di applicare i risultati a questo genere di superficie, noi eseguiremo l'e-

nunziata disamina sulla paraboloide iperbolica, la cui equazione, coi segni posti in evidenza, è

(16) $$p'y^2-pz^2=pp'x.$$

Se v'à una retta situata interamente su questa superficie, la sua proiezione orizzontale sarà della forma

(17) $$y=\alpha x+\beta,$$

dove α e β son due costanti indeterminate; ed il piano proiettante rappresentato bensì da questa equazione (17) dovrà dare, mediante la sua combinazione colla superficie (16), una sezione di secondo grado, un ramo della quale sia *rettilineo*, e per conseguenza l'altro ramo lo sarà parimente. Ora eliminando x tra (16) e (17), a motivo che la proiezione sul piano YZ è la più importante, si ottiene

(18) $$z^2=\frac{p'}{p}\left(y^2-\frac{py}{\alpha}+\frac{p\beta}{\alpha}\right);$$

e perchè questa equazione possa decomporsi in due fattori di primo grado, fa mestieri che il secondo membro sia un quadrato perfetto, poichè tale è il primo membro, ciò che esige che si ponga

$$\frac{p^2}{\alpha^2}=\frac{4p\beta}{\alpha}, \text{ donde } \beta=\frac{p}{4\alpha}.$$

Dunque siccome questa relazione tra β ed α lascia indeterminata una di queste quantità, si scorge che vi saranno infinite rette giacenti sulla superficie, e le cui proiezioni desunte dall'equazioni (17) e (18) dopo aver sostituito il valor di β, saranno

(19) $$y=\alpha x+\frac{p}{4\alpha}$$

(20) $$z=\pm\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(y-\frac{p}{2\alpha}\right).$$

La terza proiezione si caverebbe da queste con la eliminazione di y, ed avrebbe la forma

(21) $$z=\pm\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(\alpha x-\frac{p}{4\alpha}\right).$$

169. Prima di andar oltre osserviamo che questi risultamenti diverrebbero immaginari, se si cangiasse il segno del

parametro p'; dal che si raccoglie che *la paraboloide ellittica non ammette alcuna generatrice rettilinea.*

170. Quanto alla paraboloide iperbolica, le diverse rette che essa ammette, corrispondentemente a dei valori successivi dell' indeterminata α, hanno a due a due una proiezione orizzontale comune; ma siccome le proiezioni sugli altri piani sono diverse, fa mestieri partirle in due *sistemi* (A) e (B), cioè

$$(A)\begin{cases} y=\alpha x+\frac{p}{4\alpha}, \\ z=+\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(y-\frac{p}{2\alpha}\right); \end{cases} \qquad (B)\begin{cases} y=\alpha x+\frac{p}{4\alpha}, \\ z=-\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(y-\frac{p}{2\alpha}\right); \end{cases}$$

$$(A')\begin{cases} y=\alpha' x+\frac{p}{4\alpha'}, \\ z=+\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(y-\frac{p}{2\alpha'}\right); \end{cases} \qquad (B')\begin{cases} y=\alpha' x+\frac{p}{4\alpha'}, \\ z=-\sqrt{\frac{p'}{p}}\left(y-\frac{p}{2\alpha'}\right); \end{cases}$$

(A'') . . . . (B'') . . . .

. . . .

Per rendere più manifeste le posizioni rispettive di queste rette, separiamo i tre piani coordinati trasportandoli parallelamente ad essi stessi fino ad una certa distanza; e allora si scoprirà che *le proiezioni orizzontali di tutte le generatrici dei due sistemi* sono altrettante tangenti $MT, M'T', ..$ (*fig.* 24) della parabola principale $y^2=px$. In fatti, se combiniamo questa equazione con (19) per avere i punti comuni alle due linee da esse rappresentate, troveremo

$$\alpha^2x^2-\frac{px}{2}+\frac{p^2}{16\alpha^2}=0,$$

risultamento che, essendo un quadrato perfetto, annunzia che le ascisse dei due punti di sezione di MT con la parabola OA son tra loro eguali, del pari che le ordinate che poscia si desumerebbero da (19): il che prova che la retta MT è in realtà una tangente della parabola orizzontale OA.

In simigliante modo si proverebbe che le proiezioni delle

generatrici sul piano XZ, le quali per ciascun valore di α son rappresentate dalla doppia equazione (21), debbono essere tangenti, siccome le $RS, RV, \ldots$ della parabola principale $z^2 = -p'x$.

171. Quanto alle proiezioni delle generatrici sul piano YZ, le seconde equazioni dei sistemi (A), $(A'), \ldots$ dove i coefficienti delle variabili sono indipendenti da $\alpha, \alpha', \ldots$ mostrano che queste proiezioni sono delle *rette parallele*, NA, $N'A', \ldots$; dunque i piani proiettanti son paralleli tra essi, ed in conseguenza le generatrici nello spazio son tutte parallele ad uno qualunque di tali piani. La paraboloide iperbolica gode pertanto di questa notevole proprietà, che *tutte le generatrici del sistema (A) son parallele ad un medesimo piano $aO'X$*, che ha per equazione

$$z = +y\sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

Questo piano, o tutt'altro ad esso parallelo dicesi *piano direttore* delle rette del sistema (A).

Una simile relazione à luogo per le rette del sistema (B), perchè le seconde equazioni (B), $(B'), \ldots$ mostrano che le loro proiezioni sul piano YZ sono delle parallele $NB, N'B' \ldots$; il perchè queste generatrici, nello spazio, son tutte parallele al piano direttore $bO'X$ determinato dall'equazione

$$z = -y\sqrt{\frac{p'}{p}}.$$

Osserviamo che i due piani direttori si tagliano sempre secondo l'asse OX della paraboloide, o secondo una parallela a quest'asse; e che risulterebbero perpendicolari tra loro quando fosse $p = p'$.

172. *Due rette qualunque (A) ed (A') di un medesimo sistema non esistono giammai in uno stesso piano.* Infatti le loro proiezioni sul piano YZ son parallele: dunque le generatrici in quistione non si tagliano; ma d'altra parte non sono tra esse parallele nello spazio, perchè le loro proiezioni sul piano XY sono tangenti di una stessa parabola, e perciò si tagliano necessariamente: dunque le due generatrici non sono in uno stesso piano. E però la paraboloide iperbolica, riguardata come luogo geometrico delle rette (A), (A'), $(A''), \ldots$ è *una superficie storta* (n° 149), e

inoltre presenta la circostanza particolare che le sue generatrici rettilinee son tutte parallele ad un medesimo piano $aO'X$.

Una conseguenza analoga à luogo per le rette del sistema (B), le quali a due a due neppure son mai in uno stesso piano.

173. Per contrario, *una retta qualunque del sistema* (A) *incontra tutte quelle dell' altro sistema*. Ciò è evidente per le generatrici (A) e (B), situate ambedue nello stesso piano verticale MT (*fig.* 24), e proiettate secondo NA ed NB; ma confrontiamo (A) con (B'). Le loro proiezioni sopra YZ s'incontrano in E, e siccome conducendo per questo punto una parallela ad OX, essa non taglia la paraboloide che in un sol punto D, a motivo che l'equazione di tal superficie è di primo grado in x, così è certo che il punto proiettato in E e D è comune alle due generatrici. L'analisi conduce puranche alla stessa conseguenza; poichè se si combinano le quattro equazioni (A) e (B') del n° 170, si vedrà facilmente che le medesime si accordano in dare uno stesso valore per y, dopo l'eliminazione delle variabili x e z.

In simil modo si proverebbe che ogni generatrice (B) incontra tutte quelle del sistema (A).

174. Dunque, poichè il movimento di una retta è compiutamente determinato per la condizione di appoggiarsi a tre altre rette fisse (n° 149), se ne conclude che facendo scorrere la generatrice (A) sopra (B), (B') e (B''), essa non potrà assumere che le posizioni (A'), (A''),... le quali già incontrano queste direttrici, e descriverà per tal modo la paraboloide iperbolica. Sotto un tal punto di veduta questa superficie diviene un caso particolare della iperboloide ad una falda (n° 150), perchè qui *le tre direttrici* (B), (B'), (B'') adempiono (n° 171) la condizione di esser tutte parallele ad un medesimo piano $bO'X$.

175. Osserviamo da ultimo che il movimento di una retta è altresì determinato quando non si assegnano che *due direttrici*, colla condizione che *la retta mobile resti parallela ad un piano dato*. Ed in vero, tagliando le due rette fisse con piani paralleli al *piano direttore*, ed unendo con altrettante rette i punti di sezione di ciascun piano, si ottengono altrettante posizioni della generatrice.

Da ciò segue che la paraboloide iperbolica può esser bensì generata dalla retta (A) condizionata a scorrere soltanto su

(B) e (B'), e di più a restar parallela al piano dato $aO'X$; perchè in tal modo essa non potrà prendere se non le posizioni (A'), (A''),.... le quali adempiono già queste due condizioni. Altronde questa maniera di generazione, che in pratica è la più comoda, è anche duplice come la precedente (n° 174), essendochè la stessa paraboloide può esser generata dal movimento della retta (B) sopra le (A) ed (A'), colla condizione che si conservi parallela al piano direttore $bO'X$.

176. Viceversa, *quando una retta qualunque* A *scorre su due rette fisse* B *e* B' *non situate in uno stesso piano*, e si mantiene parallela ad un piano dato, essa genera sempre una paraboloide iperbolica.

Prendiamo il dato piano direttore pel piano coordinato XY, e scegliamo il piano XZ parallelo alle due direttrici B e B', lasciando nel resto arbitrari l'origine O e i due assi OY, OZ: allora le direttrici riferite a questi assi obbliqui verranno evidentemente rappresentate da

$$(B) \qquad y=h, \quad x=az+b,$$
$$(B') \qquad y=h', \quad x=a'z+b'.$$

La generatrice che deve essere costantemente parallela al piano XY, avrà equazioni della forma

$$(A) \qquad z=\gamma, \quad y=\alpha x+\beta,$$

dove le quantità α, β, γ sono delle costanti indeterminate; ma bisognerà unirvi le relazioni esprimenti che questa retta mobile incontra sempre ciascuna delle due direttrici, relazioni che si ottengono (n° 25) per la eliminazione delle tre variabili x, y, z una volta fra l'equazioni (A) e (B), e un altra volta fra l'equazioni (A) e (B'). Queste relazioni sono

$$(22) \qquad h=\alpha(a\gamma+b)+\beta,$$
$$(23) \qquad h'=\alpha(a'\gamma+b')+\beta.$$

Le tre costanti α, β, γ trovandosi così legate da due equazioni, una di esse, per esempio α, rimane arbitraria, cosicchè dandole diversi valori successivi $\alpha=1$, $\alpha=2$,... se ne potrebbero desumere quelli di β e γ; e poscia sostituendo questi valori corrispondenti di α, β, γ nell'equazioni (A) si otterrebbero successivamente varie posizioni *determinate* della retta mobile. Ma se per contrario si eliminano α, β, γ fra le quattro equazioni (22), (23) ed (A), il risultato con-

verrà a tutte le posizioni della generatrice, e sarà in conseguenza l'equazione del luogo geometrico percorso da questa retta. Ora, per via di sottrazioni evidenti si eliminano con facilità β e γ, e si ottiene

$$y-h=\alpha(x-az-b),$$
$$y-h'=\alpha(x-a'z-b');$$

da queste poi, eliminando α, risulta

(24) $yz(a-a')+y(b-b')+z(a'h-ah')+x(h'-h)=bh'-b'h.$

Questa superficie è di secondo grado e *non ammette centro*, perchè il termine $x(h'-h)$ che è di grado dispari, non potrà mai sparire (n° 94) permutando gli assi attuali in altri paralleli ai medesimi, a motivo che un tal termine essendo il solo che sia funzione di x, conserverà sempre il coefficiente dato $(h'-h)$. L'equazione (24) esprime pertanto una delle paraboloidi, e propriamente l'iperbolica, poichè supponendo $x=0$ si ottiene una iperbole, il che non potrebbe avvenire (n° 159) per l'altra paraboloide; e d'altronde quest'ultima non ammette (n° 169) generatrici rettilinee (*).

177. Se non avessimo voluto presentare al lettore un esercizio di calcolo atto a servirgli di guida nei casi generali, avremmo potuto giungere ad un risultamento assai più semplice scegliendo gli assi coordinati di una maniera anche più speciale. Difatti, conservando il dato piano direttore per piano delle XY, si può scegliere l'asse OY per modo che passi pei due punti ov'è incontrato dalle direttrici B e B'; si può mettere l'origine O nel mezzo di questa distanza (**), condurre il piano XOZ parallelamente alle rette B e B', è

(*) Se si supponesse $h=h'$, l'equazione (24) si decomporrebbe in due fattori, e questi esprimerebbero due piani che s'incontrano. Infatti, questa supposizione equivale a dire che le due direttrici B e B' esistono in un medesimo piano $y=h$, ed allora la generatrice mobile, parallela sempre al piano XY, non può assumere che uno di questi due movimenti: 1.° descrivere il piano stesso delle due rette B e B'; 2.° passare costantemente pel punto in cui queste rette si tagliano, e descrivere un piano parallelo ad XY.

(**) Non bisogna credere che questa distanza, o quest'asse OY, coincida con la *minima distanza* delle due direttrici, poichè ciò supporrebbe che il piano direttore fosse perpendicolare al piano parallelo a queste due rette

in fine dirigere l'asse OZ in guisa che s'inclini a queste direttrici sotto *angoli eguali*. Con siffatti assi obbliqui, le rette B e B' si proietteranno sul piano XZ in rette che passano per la origine, ed avranno evidentemente per equazioni

$$(B) \qquad y=h\ ,\ x=az$$
$$(B') \qquad y=-h\ ,\ x=-az.$$

La generatrice poi avrà le sue equazioni della forma

$$(A) \qquad z=\gamma\ ,\ y=\alpha x+\beta\ ;$$

ma dovendosi appoggiare di continuo sulle rette (B) e (B'), avranno luogo l'equazioni di condizione

$$\beta=0\ ,\ h=a\alpha\gamma.$$

Per la qual cosa, eliminando α,β,γ fra queste ultime quattro equazioni, avremo per la superficie dimandata

$$(25) \qquad ayz=hx:$$

risultamento che potevasi dedurre dall'equazione (24) supponendovi $b=0$, $b'=0$, $a'=-a$, $h'=-h$.

178. Osserviamo che sotto le due forme (24) e (25), i piani XY ed XZ sono visibilmente i ***due piani direttori*** della paraboloide, ai quali le generatrici dei due sistemi sono rispettivamente parallele (n° 171); ma qui la loro intersezione OX è soltanto *parallela* all'asse principale di questa superficie, e perciò quando si pone $z=k$, o pure $y=k$, trovasi per sezione una retta sola.

179. Dimostriamo ancora il modo reciproco di generazione indicato nel n° 174, cercando l'equazione della ***superficie generata da una retta mobile* A *condizionata a scorrere costantemente su tre rette fisse* B, B', B'', *che sono tutte tre parallele ad un medesimo piano*:** ben vero che due qualunque di queste rette non esistano in un medesimo piano, perchè l'ipotesi contraria non condurrebbe se non a trovare il sistema di due piani, la cui posizione si può con facilità prevedere anticipatamente (n° 154).

Prendiamo il piano XY parallelo alle tre direttrici B, B', B'', e la prima di queste rette per l'asse OX; per un punto qualunque O di quest'asse dirigiamo l'asse OY parallelamente a B', e in fine prendiamo per terzo asse la retta

OZ che incontra nel tempo stesso le tre direttrici. Allora queste linee avranno per equazioni

$$(B) \qquad y=0\ ,\ z=0,$$
$$(B') \qquad x=0\ ,\ z=h,$$
$$(B'') \qquad y=ax,\ z=k.$$

La generatrice verrà espressa da

$$(A) \qquad x=\alpha z+\gamma\ ,\ y=\beta z+\delta\ ,$$

ma perchè incontri ciascuna delle direttrici, bisognerà (n° 25) unirvi le condizioni

$$\delta=0,\ \alpha h+\gamma=0,\ \beta k+\delta=a(\alpha k+\gamma)\ ,$$

e ragionando come nel n° 176, converrà eliminare $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ fra queste cinque equazioni. A tal fine, se da prima si sostituiscono i valori delle tre ultime quantità nell'equazioni (*A*), si avrà per una posizione qualunque della generatrice,

$$(26) \qquad x=\alpha(z-h)\ ,\ y=\frac{a\alpha(k-h)}{k}z\ ;$$

e poscia eliminando α, si troverà pel cercato luogo geometrico

$$(27) \qquad kyz+a(h-k)xz=hky.$$

Ora per questa equazione di secondo grado, il polinomio *D* del n° 95, che serve di denominatore alle coordinate del centro, trovasi evidentemente nullo, e per ciò la superficie non potrebb'essere che una delle due paraboloidi, o pure un cilindro (n° 96). Ma quest'ultima ipotesi è manifestamente incompatibile colla direzione delle generatrici, le quali non sono parallele tra esse; dunque resterà fermo che la superficie (27) è una ***paraboloide iperbolica***, poichè l'altra paraboloide punto non ammette (n° 169) generatrici rettilinee.

180. Di più, è facile ravvisare che le posizioni (*A*),(*A'*), (*A''*),... della generatrice trovansi ancora, come debb'essere in una paraboloide, ***tutte parallele ad un medesimo piano***. Difatti, queste diverse posizioni vengono rappresentate dall'equazioni (26), con attribuire ad α valori arbitrari e successivi $\alpha', \alpha'', \alpha''',\ldots$ Ora un piano

$$Ax+By+Cz=0$$

è parallelo alla retta (26), quando si stabilisce (n° 45) la condizione

$$A\alpha+B\frac{a\alpha(k-h)}{k}+C=0,$$

e questa condizione trovasi verificata indipendentemente da α, quando si suppone

$$Ak+Ba(k-h)=0, \text{ e } C=0;$$

dunque per tali valori di A, B, C, il piano

$$ky=a(k-h)x$$

sarà veramente parallelo a tutte le rette espresse dall'equazioni (26), qualunque sia il valore attribuito ad α.

181. Osserviamo finalmente che nelle due generazioni adoperate nei n[i] 176 e 179, le direttrici prese due a due, come (B) e (B'), o (B') e (B''), risultano *divise proporzionalmente* dalle posizioni successive (A),(A'),(A''),... della generatrice. Ed in vero, quest'ultime rette essendo tutte parallele ad un medesimo piano, per ciascuna di esse può condursi un piano parallelo a questo piano direttore, ed è noto dalla geometria che delle rette qualunque restano divise in parti proporzionali da piani paralleli. Questa proprietà servirebbe a costruire semplicissimamente un modello *in rilievo* della paraboloide iperbolica, adoperando un quadrilatero *storto* (cioè non piano), i cui lati opposti fossero divisi in uno stesso numero di parti eguali, ed unendo con fili i corrispondenti punti di divisione.

CAPITOLO IX.

TEOREMI DIVERSI CIRCA LA SIMIGLIANZA DELLE CURVE E DELLE SUPERFICIE QUALUNQUE, CIRCA LE SEZIONI PARALLELE DELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO, EC.



182. SIMIGLIANZA DELLE CURVE. Due curve di grado qualunque, situate in un medesimo piano o in piani paralleli, si dicono *simili e similmente poste*, quando preso un punto arbitrario O (*fig.* 25), e per esso condotti ad una delle curve diversi raggi vettori OM, ON,..., può trovarsi un

punto O' tale che i raggi vettori $O'M', O'N', \ldots$ per esso menati all'altra curva, parallelamente ai primi e diretti nel medesimo senso, abbiano a questi un rapporto costante, cosicchè sia

$$\frac{O'M'}{OM} = \frac{O'N'}{ON} = \ldots\ldots = k.$$

È facile il provare che se queste condizioni si trovano adempiute per due *centri di simiglianza*, ve ne potranno essere infiniti altri. Difatti, prendiamo un punto I ad arbitrio, e condotta parallelamente ad OI la retta $O'I'$, tagliamo su di questa una lunghezza tale che sia

$$\frac{O'I'}{OI} = k\,;$$

allora si dimostrerà facilmente, per via di triangoli simili, che i raggi vettori IM ed $I'M'$, IN ed $I'N'$, . . . sono rispettivamente paralleli, ed hanno tra essi il rapporto k: di che nasce che i punti I ed I' sono ancora due centri corrispondenti di simiglianza.

183. È bene osservare che nelle curve *simili di forma e di posizione*, le tangenti di esse agli estremi di due raggi vettori omologhi OM ed $O'M'$ son sempre parallele tra loro.

In effetto, i triangoli OMN ed $O'M'N'$, evidentemente simili, rendono palese che le secanti MN ed $M'N'$ sono parallele; or siccome questa relazione non cessa di aver luogo, quando gli angoli che i raggi vettori ON ed $O'N'$ comprendono colle rette fisse OM ed $O'M'$ divengono di più in più piccioli, ma son sempre uguali tra essi, ne segue che quando questi angoli si annullano nel tempo stesso, le secanti ridotte in allora a tangenti, si troveranno ancora parallele.

184. Se i raggi vettori proporzionali non fossero rispettivamente paralleli, ma per altro formassero angoli eguali con due rette OX, $O'X'$ fisse e dirette in sensi diversi, le curve sarebbero simili *di forma* soltanto, e *non di posizione*. Allora, per ristabilire la simiglianza sotto ambidue i rapporti, basterebbe evidentemente far rotare la seconda curva intorno ad O', di una quantità angolare indicata dall'angolo compreso fra le due rette OX ed $O'X'$.

Finalmente, se dopo questa rotazione si trasportasse la seconda curva parallelamente a sè stessa, per guisa da far

coincidere il punto O' con O, le due curve simili diverrebbero ancora *concentriche* per rapporto al loro centro di simiglianza.

185. Per esprimere analiticamente le condizioni della *simiglianza di forma e di posizione*, rappresentiamo con

$$(1)\quad F(x,y)=0,\qquad (2)\quad F'(x,y)=0,$$

l'equazioni delle due curve riferite ai medesimi assi qualunque OX, OY, (*fig.* 25); poscia, adottando per centro di simiglianza della prima curva l'origine O delle coordinate, dovrà esistere per la seconda un centro corrispondente O', di cui chiameremo α e β le coordinate incognite. Allora i triangoli simili MOP, $M'O'P'$ fan vedere che si esprimerà compiutamente *la proporzionalità* e *il parallelismo* dei raggi $OM, O'M'$, stabilendo le due condizioni

$$(3)\quad \frac{x'-\alpha}{x}=k,\qquad (4)\quad \frac{y'-\beta}{y}=k,$$

dove k è una costante ignota ma essenzialmente positiva; ammeno che non si volesse ammettere una *simiglianza inversa*, nella quale i raggi vettori proporzionali avessero direzioni precisamente contrarie: poichè in questo caso i numeratori delle frazioni (3) e (4) dovrebbero esser suppliti da $\alpha-x'$ e $\beta-y'$, il che tornerebbe lo stesso che supporre k negativo.

Ciò premesso, poichè le coordinate delle due curve simili (1) e (2) debbono avere tra esse le relazioni (3) e (4), ne avverrà che desumendo da quest'ultime i valori di x e y per sostituirli in (1), il risultato

$$(5)\qquad F\left(\frac{x'-\alpha}{k},\ \frac{y'-\beta}{k}\right)=0$$

dovrà trovarsi identico all'equazione (2), poichè l'uno e l'altra esprimono una relazione tra le coordinate della seconda curva riferita ai medesimi assi. Converrà dunque, in ogni esempio, ordinare e *identificare* l'equazioni (2) e (5); indi vedere se si possono soddisfare le condizioni richieste da questa operazione con dei valori reali e finiti delle costanti ignote α, β, e k. Nondimeno l'ultima di queste grandezze potrebb'essere immaginaria, senza che la simiglianza cessasse di esistere sotto il rapporto analitico, come vedremo accadere (n° 190) nell'iperbole coniugate.

186. Applichiamo questo procedimento a due curve di secondo grado rappresentate dall' equazioni

$$(6)\qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0\ ,$$

$$(7)\qquad A'y'^2+B'x'y'+C'x'^2+D'y'+E'x'+F'=0.$$

Sostituendo nella prima per x ed y i loro valori cavati dalle relazioni (3) e (4), si trova

$$(8)\qquad Ay'^2+Bx'y'+Cx'^2+y'(Dk-2A\beta-B\alpha)$$
$$+x'(Ek-2C\alpha-B\beta)+(A\beta^2+C\alpha^2+B\alpha\beta-kD\beta-kE\alpha+Fk^2)=0,$$

equazione che dovendo essere identica all'altra (7), esige che si abbiano le cinque relazioni

$$(9)\quad \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\ ,\qquad (10)\quad \frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}\ ,$$

$$(11)\quad \frac{A}{A'}=\frac{Dk-2A\beta-B\alpha}{D'}\ ,\qquad (12)\quad \frac{A}{A'}=\frac{Ek-2C\alpha-B\beta}{E'}\ ,$$

$$(13)\quad \frac{A}{A'}=\frac{A\beta^2+C\alpha^2+B\alpha\beta-kD\beta-kE\alpha+Fk^2}{F'}\ ;$$

ma siccome in esse vi hanno tre incognite α, β, e k, le condizioni propriamente dette di simiglianza saranno soltanto *due*, e dovendosi ottenere per l'eliminazione delle incognite, verranno espresse dall' equazioni (9) e (10). Le tre rimanenti equazioni serviranno a determinare α, β, e k, cioè a dire il centro e il rapporto di simiglianza, nel modo che bentosto verrà dichiarato.

187. Dalle condizioni (9) e (10) risulta che *due curve di secondo grado sono simili e similmente poste, quando i coefficienti dei tre termini di secondo grado sono rispettivamente proporzionali nelle due equazioni;* e siccome ponendo

$$h=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\ ,$$

ne viene

$$B^2-4AC=h^2\,(B'^2-4A'C')\ ,$$

si fa palese che le due curve simili saranno sempre della *medesima specie*.

Di più, supponendo la curva (6) riferita ai suoi *diametri principali*, si à evidentemente

$$B=0\ ,\ D=0\ ,\ E=0.$$

Dunque perchè sia simile e similmente posta alla seconda, converrà ammettere che

$$B'=0, \quad \text{ed} \quad \frac{A}{A'}=\frac{C}{C'}:$$

ciò che esprime ad evidenza che *gli assi di una sono ad un tempo paralleli e proporzionali agli assi dell'altra.*

188. Nel caso di due parabole, se si suppone la prima riferita al suo *asse principale* ed al suo vertice, sarà nell'equazione (6)

$$B=0, \ C=0, \ D=0, \ F=0;$$

e quindi per soddisfare alle condizioni (9) e (10) bisognerà supporre

$$B'=0, \ C'=0:$$

il che esprime che l'asse della seconda parabola è parallelo a quello della prima, ma nulla determina circa il rapporto $\frac{A}{A'}$. Adunque *due parabole i cui assi trovansi paralleli* (a) *son sempre simili* di forma e di posizione, *qualunque ne siano i parametri;* e però tutte le parabole debbonsi avere per simili, almeno in quanto alla forma, potendole (n° 184) far rotare per modo da renderne gli assi paralleli tra loro.

189. Ritorniamo intanto all'equazioni (6) e (7) relative a due assi qualunque, e supponendo adempiute le condizioni (9) e (10), calcoliamo le incognite α, β, k. Se per semplicità si pone

$$h=\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'},$$

l'equazioni (11), (12), (13) diverranno

$$(14) \qquad 2A\beta+B\alpha=Dk-D'h,$$
$$(15) \qquad 2C\alpha+B\beta=Ek-E'h,$$
$$A\beta^2+C\alpha^2+B\alpha\beta-D\beta k-E\alpha k=F'h-Fk^2,$$

(a) Dovrebbesi aggiungere: *e diretti nel medesimo senso,* non parendo certo similmente poste due parabole che rivolgono le loro concavità in senso contrario: ma non vuolsi dimenticare che l'autore riguarda sempre la simiglianza sotto il punto di veduta analitico.

l'ultima delle quali, combinata colle altre può essere rimpiazzata dalla seguente di primo grado in α e β:

$$(16)\qquad \beta(Dk+D'h)+\alpha(Ek+E'h)=2(Fk^2-F'h).$$

Allora cavando da (14) e (15) i valori

$$(17)\qquad \alpha=\frac{B(Dk-D'h)-2A(Ek-E'h)}{B^2-4AC},$$

$$(18)\qquad \beta=\frac{B(Ek-E'h)-2C(Dk-D'h)}{B^2-4AC},$$

e poscia sostituendoli in (16), trovasi dopo alcune riduzioni un'equazione di secondo grado a due termini, la quale dà

$$(19)\quad k=\sqrt{h^3\frac{2F'(B'^2-4A'C')-E'(B'D'-2A'E')-D'(B'E'-2C'D')}{2F(B^2-4AC)-E(BD-2AE)-D(BE-2CD)}}.$$

Questo valore, unico, poichè (n° 185) si deve prendere k positivamente, non darà mediante l'espressioni di α e β che un *centro solo*, il quale corrisponde alla origine O delle coordinate, adottata per centro di simiglianza della prima curva; ma perchè α e β siano reali, converrà generalmente che altresì k sia reale, condizione che non dipende dalla quantità numerica h, la quale è sempre positiva se si è avuto cura di render tali i coefficienti A' ed A.

190. Ciò non ostante osserviamo che il rapporto di simiglianza k potrebb'essere immaginario, restando α e β reali, se nell'espressioni (17) e (18) il coefficiente di k si trovasse nullo; e per far intendere come in tal caso le condizioni analitiche della simiglianza sono tuttavia soddisfatte, citeremo l'esempio di due iperbole coniugate, espresse dall'equazioni

$$a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0$$
$$a^2y'^2-b^2x'^2-a^2b^2=0.$$

Si à in questo caso

$$\alpha=0,\ \beta=0,\ k=\sqrt{-1},$$

il che dinota che i due centri di simiglianza coincidono col centro di figura comune alle due curve. Ora se da questo punto si conducono due raggi vettori paralleli, terminati rispettivamente alle due iperbole, si vedrà che uno è immaginario quando l'altro è reale, e viceversa; ma calcolando

le loro espressioni analitiche, trovasi che esse hanno la forma

$$r=\sqrt{\pm p^2}\,,\quad r'=\sqrt{\mp p^2}\,,$$

talchè sarà vero il dire che il loro rapporto è costante ed eguale a $\sqrt{-1}$.

191. *Le diverse sezioni parallele fatte in una medesima superficie di secondo grado, son curve simili di forma e di posizione*, almeno in senso analitico.

Consideriamo primamente le superficie dotate di un centro, e combiniamo la loro equazione generale

$$(20)\qquad Px^2+P'y^2+P''z^2=H$$

con quella di un piano qualunque

$$(21)\qquad z=ax+by+\delta.$$

Eliminando z tra esse, la curva d'intersezione, proiettata sul piano XY, verrà espressa da

$$(22)\qquad (P+P''a^2)\,x^2+(P'+P''b^2)\,y^2+2P''abxy$$
$$+2P''a\delta x+2P''b\delta y+P''\delta^2-H=0,$$

e per ottenere la sezione prodotta da un altro piano

$$z=ax+by+\delta',$$

parallelo al piano (21), basterebbe evidentemente rimpiazzare δ con δ' nell'equazione (22). Or questo cangiamento non alterando per nulla i coefficienti dei termini di secondo grado, che qui sono indipendenti da δ, si vede che le condizioni (9) e (10) del n° 186 si troveranno verificate; e però (*fig.* 25) *le proiezioni* MN... ed $M'N'$... delle due sezioni parallele *saranno simili e similmente poste*. Aggiungo che sarà lo stesso di queste curve nello spazio; poichè se pei raggi vettori paralleli OM ed OM', ON ed ON',.... si conducono dei piani verticali, questi taglieranno evidentemente i piani delle due sezioni in rette parallele a due a due, che possiamo indicare con om ed $o'm'$, on ed $o'n'$,... Di più è facile vedere che tra queste rette e le loro proiezioni si avranno (n° 67) le relazioni

$$OM=om.\cos\alpha\,,\quad ON=on.\cos\beta\,,\ldots$$
$$O'M'=o'm'.\cos\alpha,\quad O'N'=o'n'.\cos\beta,\ldots;$$

ma siccome la simiglianza delle curve $MN\ldots$, ed $M'N'\ldots$, dava i rapporti eguali

$$\frac{OM}{O'M'}=\frac{ON}{O'N'}=\ldots=k,$$

così l'equazioni precedenti daranno quest'altra serie di rapporti eguali

$$\frac{om}{o'm'}=\frac{on}{o'n'}=\ldots=k:$$

il che ben dimostra la simiglianza di forma e di posizione delle curve $mn\ldots$ ed $m'n'\ldots$ situate nello spazio.

192. Per conoscere il *luogo dei centri* di tutte le sezioni parallele al piano (21), osserveremo che il centro di una curva situata nello spazio si proietta sempre nel centro della proiezione di essa. Or quello della curva (22) si può avere, come nel n° 95, sostituendo $x+x_1$, $y+y_1$ per x, y, e nel risultato eguagliando a zero i coefficienti dei termini di primo grado in x e y. Con tal modo, e con rimettere x e y in luogo di x_1 e y_1, si hanno l'equazioni

$$(23)\qquad (P+P''a^2)x+P''aby+P''a\delta=0,$$
$$(24)\qquad (P'+P''b^2)y+P''abx+P''b\delta=0,$$

le quali unitamente all'equazione (21) del piano secante, in cui trovasi evidentemente il richiesto centro, determinano le tre coordinate del centro della sezione, che nello spazio corrisponde a un dato valore di δ. Quindi se, per contrario, si elimini questa costante, che varia da una sezione ad un'altra, fra l'equazioni (22), (23) e (24), si otterrà il luogo di tutti i centri delle sezioni parallele. Ma cavando il valore di δ dall'equazione (21) per sostituirlo in (23) e (24), trovasi

$$(25)\qquad Px+P''az=0,\qquad (26)\qquad P'y+P''bz=0,$$

cioè a dire una retta che passa per l'origine delle coordinate, la quale è qui il centro della superficie (20); dunque *il luogo dei centri di tutte le sezioni parallele è un diametro della superficie.*

193. È bene osservare che questo diametro è *coniugato* con quello dei piani secanti, che passa pel centro della superficie. In effetto l'equazioni precedenti equivalgono alle altre

$$x=\frac{P''a}{P}z,\quad y=-\frac{P''b}{P}z,$$

e nell'equazione del piano diametrale trovata nel n° 105, supponendo nulle le quantità B, B', B'', C, C', C'', e cambiando A, A', A'' in P, P', P'', ed m, n in $-\frac{P''a}{P}$, $-\frac{P''b}{P}$, trovasi $z = ax + by$.

194. Quando il piano secante (21) à una direzione acconcia a dare sezioni paraboliche, potrebbesi dimandare in qual senso debbasi prendere il teorema dimostrato nel n° 192. Ora se si cerchi la condizione necessaria perchè l'equazione (22) esprima una parabola, si vedrà che essa rende nel tempo stesso il richiesto diametro parallelo al piano secante; dal che avviene che il loro incontro, il quale avrebbe dovuto dare il centro della curva, non à luogo realmente che all'infinito.

195. Quanto alle superficie sfornite di centro, le quali son tutte comprese nell'equazione

$$(27) \qquad p'y^2 + pz^2 = pp'x,$$

la sezione prodottavi da un piano qualunque

$$(28) \qquad x = by + cz + \delta,$$

avrà per proiezione sul piano YZ,

$$(29) \qquad p'y^2 + pz^2 - pp'by - pp'\delta = 0;$$

e poichè facendo variare soltanto δ, i coefficienti dei termini di secondo grado restano inalterati, se ne conchiuderà, come nel n° 191, e nel medesimo senso, che *le sezioni parallele sono, nello spazio, simili e similmente poste.*

196. Il centro della curva (29) verrà determinato dall'equazioni

$$(30) \qquad 2y - pb = 0, \qquad (31) \qquad 2z - p'c = 0,$$

che nascono, siccome nel n° 192, sostituendo $y + y_1$ e $z + z_1$ per y e z, e nel risultato eguagliando a zero i coefficienti dei termini di primo grado in y_1 e z_1. Il centro poi della sezione nello spazio si otterrebbe combinando l'equazioni (30) e (31) con quella del piano secante; ma poichè bisognerebbe (n° 192) eliminare tra esse la costante δ per avere la linea dei centri, se ne deduce che questa linea resti determinata dall'equazioni (30) e (31), che già sono indipendenti da δ. Dunque siccome quest'equazioni esprimono una retta parallela all'asse OX della paraboloide, potremo affermare, dopo ciò che si disse nel n° 167 circa i diametri delle pa-

raboloidi, che ancora in queste superficie *il luogo dei centri delle sezioni parallele è un diametro.*

197. Vedesi facilmente che qui il diametro, luogo dei centri, à il suo piano diametrale coniugato a distanza infinita; e che questo diametro sparisce esso stesso, quando il piano segante à una direzione acconcia a dare sezioni paraboliche. Infatti, per ottenere simili curve bisognerebbe (n.ⁱ 159 e 163) rendere il piano segante (28) parallelo all' asse OX, il che si effettuirà ponendo

$$b=\frac{b'}{a},\ c=\frac{c'}{a},\ \delta=\frac{\delta'}{a},$$

e poscia $a=0$; ma siccome ciò equivale a fare $b=\infty$, apparisce che allora il diametro rappresentato dall'equazioni (30) e (31) si allontana tutto a distanza infinita.

198. Da quanto precede si può desumere una maniera di generazione comune a tutte le superficie di secondo grado, e che ne somministra la definizione più idonea alle costruzioni grafiche della Geometria descrittiva. Concepiamo che in una ellisse $ABDE$ (*fig.* 26) siansi delineati un diametro qualunque AD, ed una delle sue corde coniugate BE; poscia che in un piano condotto per questa corda, ed inclinato arbitrariamente al primo, siasi costruita una seconda ellisse BCE, avente per diametri coniugati la corda BE ed una linea qualunque $2OC$: allora, se si fa muovere quest' ultima ellisse *parallelamente a sè stessa*, per modo che il suo centro O percorra la retta AD, e che il rapporto dei suoi diametri rimanendo *costante*, il primo di essi divenga successivamente uguale alle diverse corde $B'E', B''E'', \ldots$ si produrrà una superficie che sarà evidentemente una ellissoide, poichè sarà il luogo di sezioni parallele simili tra esse, ed aventi i loro centri sul diametro AD, il quale sarà coniugato al piano condotto pel centro O'', parallelamente all' ellisse mobile.

Altronde, se vuolsi confermare questa illazione con un calcolo diretto, s' immagineranno tre assi coordinati obliqui, condotti pel centro O'' parallelamente ad OA, OB, OC. Così l' ellisse direttrice verrà espressa dall' equazioni

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

e l' ellisse variabile dalle altre

$$x=\alpha,\quad \frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1;$$

ma perchè questa abbia un punto comune colla prima, ed i suoi diametri conservino un rapporto costante, bisognerà unirvi le relazioni

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{b'^2}{b^2}=1\ ,\ c'=k.b'\ ;$$

ed allora eliminando da queste quattro equazioni le variabili α, b', c', si avrà facilmente

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{k^2b^2}=1.$$

199. Per ottenere con questo modo di generazione le due iperboloidi, basterebbe rimpiazzare l'ellisse direttrice $ABDE$ con una iperbole di cui AD fosse un diametro immaginario, o pure un diametro reale. Quanto alla paraboloide ellittica, bisognerebbe prendere per direttrice una parabola; e se nel tempo stesso alla generatrice BCE si sostituisse una iperbole di cui fosse BE il diametro reale, otterrebbesi la paraboloide iperbolica. Soltanto bisogna osservare in quest'ultimo caso, che l'iperbole mobile pervenuta in A si ridurrebbe ai suoi asintoti, e che poscia la corda $BE=2b'$ divenendo immaginaria, l'iperbole si rovescerebbe; infatti i suoi diametri $2b'$ e $2c'\sqrt{-1}$ dovendo conservare un rapporto costante, il secondo diverrà $2c'$ quando il primo si cangerà in $2b'\sqrt{-1}$. E queste circostanze sono altronde conformi alla natura della paraboloide iperbolica: siccome è dichiarato nella *Geometria descrittiva* al n° 89.

200. Simiglianza delle superficie. Due superficie di grado qualunque si dicono *simili di forma e di posizione* allorchè, dopo aver condotto alla prima diversi raggi vettori da uno stesso punto arbitrario, può trovarsi un altro punto, tale che i raggi vettori per esso condotti alla seconda superficie, parallelamente ai primi e diretti nel medesimo senso, abbiano a questi un rapporto costante.

Dopo ciò, se le due superficie riferite ai medesimi assi coordinati si suppongano espresse da

$$F(x,y,z)=0\ ,\ F'(x',y',z')=0\ ,$$

e se si dinoti con (α,β,γ) il centro di simiglianza, che per la seconda superficie corrisponde all'origine delle coordinate presa per centro della prima, si vedrà facilmente, come nel n° 185, che le condizioni del *parallelismo* e della *propor-*

zionalità dei raggi vettori vengono espresse analiticamente dalle relazioni

$$(32) \qquad \frac{x'-\alpha}{x}=k,\ \frac{y'-\beta}{y}=k,\ \frac{z'-\gamma}{z}=k\ ;$$

di sorta che desumendo da esse i valori di x, y, z per sostituirli in $F(x,y,z)=0$, il risultamento dovrà potersi rendere identico a $F'(x',y',z')=0$.

201. Applicando questo procedimento a due superficie di secondo grado, rappresentate da

$$(33)\ Ax^2+A'y^2+A''z^2+Byz+B'xz+B''xy+Cx+C'y+C''z+E=0,$$

$$(34)\ ax^2+a'y^2+a''z^2+byz+b'xz+b''xy+cx+c'y+c''z+e=0,$$

si trova che per istabilire l'identità in un modo analogo a quello tenuto nel n° 186, debbono aver luogo *nove* equazioni, le prime *cinque* delle quali, cioè

$$(35) \qquad \frac{A}{a}=\frac{A'}{a'}=\frac{A''}{a''}=\frac{B}{b}=\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''},$$

sono indipendenti dalle incognite α,β,γ,k, e per conseguenza esprimono le vere *condizioni della simiglianza;* e le rimanenti quattro serviranno a determinare queste incognite quando le condizioni (35) sono adempiute.

202. Di più, si dimostra facilmente, siccome nel n° 187, che le relazioni (35) esprimono che le due superficie (33) e (34) hanno *i loro assi principali rispettivamente paralleli e proporzionali.* E da ciò risulta evidentemente che se due diametri di queste superficie sono tra essi paralleli, anche i loro piani coniugati saranno paralleli l'uno all'altro.

203. Quando le due superficie (33) e (34) adempiono le condizioni di simiglianza (35), e s'intersegano, *la linea d' intersezione è sempre piana.* Difatti, se si ponga

$$h=\frac{A}{a}=\frac{A'}{a'}=\ldots,$$

e si moltiplichi l'equazione (34) per h, e il risultato si sottragga da (33), resterà

$$(C-ch)x+(C'-c'h)y+(C''-c''h)z+E-eh=0,$$

equazione di un piano, la quale combinata con una delle due equazioni proposte, darà tutti i punti comuni alle due

superficie, cioè la loro intersezione; cosicchè se questo piano non le incontra, l'intersezione si terrà immaginaria.

Si può anche osservare che il piano della curva di sezione risulta parallelo al piano diametrale, che nell'una o nell'altra superficie è coniugato colla retta che unisce i due centri; e per darsene facilmente ragione, si supporrà che gli assi coordinati siano scelti paralleli agli assi principali: ciò che punto non cangia la posizione relativa delle superficie.

204. Quando due superficie di un ordine qualunque, sono simili di forma e di posizione, ed i loro centri di simiglianza coincidono in O(*fig.* 27), allora tagliandole con due piani paralleli $MNP, M'N'P'$, le cui distanze dal punto O sono tra esse nel rapporto $1:k$ dei raggi vettori omologhi, le sezioni così ottenute saranno necessariamente curve simili. In fatti, i raggi $OM, ON, OP, \ldots$ menati ai diversi punti della sezione prodotta dal primo piano, sono incontrati dal secondo in punti che danno evidentemente le relazioni

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'} = \ldots = \frac{1}{k},$$

e per conseguenza i punti $M', N', P', \ldots$ esistono sulla seconda superficie. Ma d'altra parte, proiettando questi raggi parallelamente ad una retta qualunque $O\omega'\omega$, si hanno ancora tra le proiezioni i rapporti

$$\frac{\omega M}{\omega' M'} = \frac{\omega N}{\omega' N'} = \ldots = \frac{1}{k};$$

dunque *le due sezioni sono simili*, e di più i loro centri di simiglianza sono in ω ed ω'.

205. Supponiamo inoltre che le superficie in quistione siano di secondo grado, che O sia il loro centro di figura, e che la retta arbitraria $O\omega'\omega$ sia il diametro coniugato del piano diametrale parallelo ai piani secanti: i punti ω ed ω' diverranno (n° 193) i centri di figura delle due sezioni. Ma il piano MNP taglierà la seconda superficie in una curva mnp simile ad $M'N'P'$ (n° 191), e il cui centro sarà in ω. Di che si raccoglie che *due superficie di secondo grado, concentriche e simili di forma e di posizione, vengono tagliate da un piano qualunque in curve simili, similmente poste e concentriche* (*).

(*) Questa proposizione si applica utilmente in più quistioni di Geometria descrittiva, e segnatamente all'iperboloide paragonata col

206. É altresì notevole la seguente proprietà delle superficie di secondo grado, la quale non esige che queste superficie siano simili, e si può enunziare dicendo che quando due superficie qualunque di secondo grado si tagliano secondo una *curva piana*, la quale è per conseguenza di secondo grado, esiste generalmente un'altra linea d'intersezione, poichè la combinazione dell' equazioni delle due superficie conduce ad un risultato di quarto grado: ora *questa seconda sezione è ugualmente piana*. E questo risultato si esprime dicendo che quando la curva di *entrata* è piana, la curva di *uscita* lo è parimente.

Per giustificare quest'asserzione non basterebbe il dire che l'equazione finale del detto grado, nascente dalla eliminazione di una delle variabili, si dovrà scomporre, nella ipotesi ammessa, in due fattori, un dei quali appartenga alla curva di entrata, e l'altro per conseguenza sia bensì di secondo grado; perchè ciò proverebbe solo che la curva di uscita si proietta in una linea di secondo grado, ma nulla di certo farebbe conoscere circa la natura della sezione nello spazio. Supponghiamo dunque riferite le due superficie (*) a tre piani coordinati, uno dei quali, per esempio il piano XY, sia quello della curva di entrata comune alle due superficie, e rappresentiamo queste superficie coll'equazioni generali (33) e (34).

Allora dovranno esistere tra i coefficienti certe relazioni, emergenti dalla circostanza che le due superficie hanno di comune una curva situata nel piano XY; difatti, ponendo $z=0$, converrà che le due equazioni

$$Ax^2+A'y^2+B''xy+Cx+C'y+E=0,$$
$$ax^2+a'y^2+b''xy+cx+c'y+e=0,$$

---

cono asintoto che l'è simile (n° 138); e se ne desume, com'è chiaro, che per trovare *il centro* e *la specie* della sezione che produrrà nella prima superficie un dato piano secante, basta cercare il centro e la specie della sezione prodotta dal medesimo piano nel cono asintoto: ciò che offre una costruzione facile, e qualche volta la sola praticabile.

Anche la proposizione dimostrata nel n° 206 è sovente posta a profitto nella Geometria descrittiva.

(*) Questa dimostrazione, osservabile per la semplicità ed il rigore di che gode, è dovuta al sig. Binet, del pari che l' osservazione contenuta nel n° 209.

siano identiche, e perciò i coefficienti di una non dovranno differire da quelli dell'altra che per un fattore comune λ; e così necessariamente si avranno le condizioni

$$(36)\quad A=a\lambda,\, A'=a'\lambda,\, B''=b''\lambda,\, C=c\lambda,\, C'=c'\lambda,\, E=e\lambda.$$

Ciò posto per ottenere la completa intersezione delle due superficie (34) e (35), combiniamo le loro equazioni moltiplicando la seconda per λ, e sottraendo il prodotto dalla prima: resterà, avuto riguardo alle relazioni (36),

$$(37)\quad (A''-a''\lambda)z^2+(B-b\lambda)yz+(B'-b'\lambda)xz+(C''-c''\lambda)z=0.$$

Questa equazione rappresenta una nuova superficie che racchiude ancora *tutti i punti comuni alle proposte*, e che combinata con una di esse farà conoscere i diversi rami della cercata intersezione. Or l'equazione (37) si decompone nelle due

$$z=0,$$
$$(38)\quad (A''-a''\lambda)z+(B-b\lambda)y+(B'-b'\lambda)x+(C''-c''\lambda)=0,$$

la prima delle quali ci riconduce alla curva di entrata, e la seconda, che dinota evidentemente un piano, non può dare che una *curva piana di uscita* mercè la sua combinazione con (33).

207. Può nondimeno avvenire che questa seconda sezione non esista; perchè quando i coefficienti delle tre variabili sono ad un tempo nulli nell'equazione (38), il piano da essa rappresentato si trova interamente a distanza infinita, e si ricade nel caso del n° 203, a motivo che le superficie adempiono le condizioni della simiglianza. Senza peraltro ammettere queste specialissime ipotesi, è chiaro che quando il piano (38) non incontra la superficie (33), la curva di uscita è immaginaria; ma ciò non impedisce che questa curva sia piana quante volte esiste.

208. Vi à un caso particolare che offre una circostanza osservabile, ed è quando l'equazione (38) riducesi da sè stessa ad

$$(A''-a''\lambda)z=0 \quad \text{ossia} \quad z=0;$$

il che fa coincidere la curva di uscita con quella di entrata. Allora non bisogna credere che le due superficie proposte *s'interseghino* in una sola linea piana, come accade nel caso della simiglianza (n° 203), ma per cagione delle due

radici eguali che ammette l'equazione (37) ridotta qui a $z^2=0$, devesi pensare che vi à due rami d'intersezione riuniti insieme, e che però le due superficie *sono tra esse tangenti* lungo tutta questa curva comune. In tal caso le due superficie diconsi *circoscritte l'una all'altra* lungo la curva giacente nel piano XY, siccome un cilindro o pure un cono è circoscritto ad una sfera lungo la circonferenza di un cerchio.

209. Finalmente osserveremo che *quando due superficie di secondo grado hanno di comune un piano principale,* qualunque sia d'altronde la situazione degli assi principali, *la curva d'intersezione è proiettata su questo piano secondo una curva di secondo grado.*

Difatti, supponendo riferite le due superficie a tre piani coordinati rettangolari, un dei quali, per esempio il piano XZ, coincida col piano principale comune alle due superficie, le loro equazioni non potranno contenere veruna potenza *dispari* della variabile y, e saranno della forma

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+B'xz+Cx+C''z+E=0,$$
$$ax^2+a'y^2+a''z^2+b'xz+cx+c''z+e=0;$$

quindi sottraendo una dall'altra, dopo averle moltiplicate rispettivamente per a' ed A', la coordinata y si troverà eliminata, e resterà una equazione di secondo grado tra x e z per la proiezione dell'intersezione sul piano XZ (*).

CAPITOLO X.

DELLE SEZIONI CIRCOLARI NELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO.



210. Esamineremo in questo capitolo se tutte le superficie di secondo grado possano essere tagliate in tanti cerchi da piani convenevolmente inclinati; e siccome in queste superficie le sezioni parallele tra loro son sempre *simili*, basterà

(*) Questa osservazione può essere utile in Descrittiva, nel disegno relativo all'*intersezione di due superficie di rotazione i cui assi s'incontrano;* poichè allora ogni piano meridiano è necessariamente un piano principale, e quello che passa pei due assi è evidentemente comune alle due superficie.

cercare fra tutti i piani condotti per uno stesso punto (che sarà il centro o pure il vertice) quelli che danno sezioni circolari.

211. Le superficie dotate di un centro sono espresse dall'equazione generale

$$(1)\qquad Px^2+P'y^2+P''z^2=+H,$$

dove noi supporremo sempre che H sia positivo, e che tra i coefficienti delle variabili esistano le relazioni

$$(2)\qquad P>P'>P''.$$

Quando queste relazioni che supponghiamo non escludere *l'eguaglianza*, e nelle quali devesi aver conto dei segni di P, P', P'', non saranno verificate dalla data equazione, basterà rimpiazzare x con y o con z per tornare all'ipotesi attuale; e siccome almen uno di questi coefficienti vuol essere positivo, questa condizione verrà sempre adempiuta da P, talchè le lunghezze assolute degli *assi* o diametri principali, saranno date dall'equazioni

$$(3)\qquad \frac{H}{P}=a^2,\quad \frac{H}{P'}=\pm b^2,\quad \frac{H}{P''}=\pm c^2.$$

212. Ciò posto, se noi conduciamo pel centro, che qui è l'origine delle coordinate, un piano qualunque, e se si voglia ottenere la sezione effettiva e non soltanto la sua proiezione, bisognerà far capo dalle formole stabilite nel n° 85, cioè

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\varphi+y'\cos\theta\,.\,\mathrm{sen}\varphi,\\ y&=x'\,\mathrm{sen}\varphi-y'\cos\theta\,.\cos\varphi,\\ z&=y'\,\mathrm{sen}\theta, \end{aligned}$$

dove le coordinate x', y' sono parallele ai due assi rettangolari OX', OY' posti nel piano secante (*fig.* 15), θ esprime l'inclinazione di questo piano secante al piano XY, e φ l'angolo che la sua traccia forma coll'asse OX. Adunque sostituendo in (1), e sopprimendo gli accenti, avremo

$$(4)\qquad \left.\begin{array}{r} P\cos^2\varphi\\ +P'\mathrm{sen}^2\varphi \end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{r} +2P\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta\\ -2P'\cos\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\cos\theta \end{array}\right| xy \left.\begin{array}{l} +P\cos^2\theta\,.\,\mathrm{sen}^2\varphi\\ +P'\cos^2\theta\,.\cos^2\varphi\\ +P''\mathrm{sen}^2\theta \end{array}\right| y^2=H.$$

Ora perchè questa equazione in coordinate *rettangolari* esprima un cerchio, è necessario e sufficiente che il rettangolo delle variabili sparisca, e che i loro quadrati ab-

biano coefficienti eguali. Bisognerà dunque soddisfare alle condizioni

(5) $(P-P')\,\text{sen}\,\varphi.\cos\varphi.\cos\theta=0$,

(6) $P\cos^2\varphi+P'\text{sen}^2\varphi=\cos^2\theta(P\,\text{sen}^2\varphi+P'\cos^2\varphi)+P''\text{sen}^2\theta$;

e siccome P e P' sono generalmente disuguali, non si potrà verificare la prima che in tre modi

$$\text{sen}\,\varphi=0\,,\ \cos\varphi=0\,,\ \cos\theta=0.$$

L'ipotesi $\text{sen}\,\varphi=0$ riduce l'equazione (6) a

$$P=P'\cos^2\theta+P''\text{sen}^2\theta=\frac{P'+P''\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\,,$$

da cui si desume il valore di $\tan\theta$, che noi useremo in preferenza del seno, perchè i risultati saranno più simmetrici e più semplici a discutere. Poscia operando similmente per l'altre due ipotesi, si avranno i tre seguenti sistemi di valori

$$\text{sen}\,\varphi=0 \quad \text{con} \quad \tan\theta=\pm\sqrt{\frac{P-P'}{P''-P}}\,, \qquad (7)$$

$$\cos\varphi=0 \quad \text{con} \quad \tan\theta=\pm\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}\,, \qquad (8)$$

$$\cos\theta=0 \quad \text{con} \quad \tan\varphi=\pm\sqrt{\frac{P''-P}{P'-P''}}\,. \qquad (9)$$

Nel primo sistema il piano secante passerebbe per l'asse OX; nel secondo, che si deduce dal primo cangiando P in P' e viceversa, il piano passa per OY; e finalmente passa per OZ nel terzo sistema, che si desume dal secondo cangiando P' in P'', e P'' in P'.

Abbiamo poi omessa nell'equazione (5) la soluzione fornita dall'ipotesi particolare $P-P'=0$, perchè condurrebbe apertamente in (6) al risultato stesso delle formole (7) e (8), quando vi si pone $P=P'$.

213. Dopo ciò la discussione dei valori ottenuti per gli angoli θ e φ riesce ben facile, mediante le relazioni (2) dianzi ammesse; poichè si vede immediatamente, che le formole (7) e (9) sono di necessità *immaginarie* quando P,P',P'' sono disuguali, e che esse riduconsi alle formole (8) quando alcuni di questi coefficienti sono tra essi eguali. Adunque per

determinare un piano secante atto a produrre sezioni circolari, non restano che i valori

$$\cos\varphi = 0, \quad \tan\theta = \pm\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}, \qquad (8)$$

i quali dimostrano che questo piano *deve passare per l'asse* OY, e che può avere *due posizioni* simmetriche rappresentate dalla duplice equazione

$$z = x\tan\theta = \pm x\sqrt{\frac{P'-P}{P''-P'}}; \qquad (10)$$

se non che importa esaminare qual sia, in ciascuna superficie dotata di un centro, il diametro principale che coincide con l'asse OY, pel quale abbiam veduto che deve passare il piano secante.

214. Ellissoide. Per questa superficie i tre coefficienti P, P', P'' son tutti positivi, e l'ammessa condizione

$$P > P' > P'' \text{ equivale ad } a < b < c;$$

talchè il diametro principale $2b$ che coincide coll'asse OY, è *l'asse medio* dell'ellissoide. D'altra parte l'inclinazione del piano secante diviene

$$\tan\theta = \pm\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}},$$

quantità facile a costruirsi; ma vale meglio determinare graficamente la ~~traccia del piano secante sull'~~ellisse che à per assi $2a$ e $2c$, con prendere semplicemente in questa curva un diametro eguale a $2b$.

215. Quando l'ellissoide è *di rivoluzione*, non si possono ammettere, stante le relazioni (2), che le due ipotesi

$$P = P' \text{ da cui } a = b,$$

o pure

$$P' = P'' \text{ da cui } b = c.$$

Ora in ambe le ipotesi i due valori di θ si riducono ad un solo, cioè $\theta = 0$, o pure $\theta = 90°$: il che annunzia che il piano secante non ammette che una sola posizione, nella quale passa *pei due assi eguali*.

216. Finalmente se si avesse $P = P' = P''$, la formola (8) darebbe per θ un valore *indeterminato*, e sarebbe inoltre

lo stesso dell' angolo φ, perchè allora l'equazioni (5) e (6) si troverebbero verificate identicamente. Pertanto in questo caso qualunque piano secante produce una sezione circolare: e difatti la superficie (1) diviene allora *una sfera.*

217. Iperboloide *ad una falda.* Per questa superficie un solo dei coefficienti è negativo, e questo debb'essere P'' in virtù delle relazioni (2); altronde queste medesime relazioni, combinate coll'equazioni (3) danno la condizione $a < b$, senza nulla far conoscere circa la grandezza assoluta di c. Dunque il diametro principale $2b$, pel quale passa il piano secante che dà sezioni circolari, è qui il *maggiore dei due assi reali*, potendo nondimeno esser più grande o più piccolo di $2c$. La situazione poi di questo piano secante si determinerà graficamente siccome nel n° 214.

218. Per rendere *di rotazione* l'iperboloide ad una falda, bisogna supporre eguali tra loro i due coefficienti del medesimo segno P, P'; ed allora la formola (8) dando $\theta = 0$, dimostra che il piano secante non ammette che una sola direzione, e propriamente quella che passa *pei due assi eguali.*

219. Iperboloide *a due falde.* Qui fa mestieri supporre negativi due dei coefficienti, e questi per le relazioni (2) debbono essere P' e P''. Le stesse relazioni danno bensì

$$-\frac{H}{b^2} > -\frac{H}{c^2}, \text{ donde } b > c,$$

senza che ne risulti veruna condizione sulla grandezza dell'unico asse reale $2a$. Dunque il diametro principale $2b$ per cui passa il piano secante, è *il maggiore dei due assi immaginari.*

Per verità il piano secante determinato colla formola (8), e condotto pel centro della iperboloide attuale, non darebbe che un cerchio *immaginario*, perchè l'equazione (4) diverrebbe

$$-P'x^2 - P'y^2 = H.$$

Ciò tiene alla circostanza che il piano secante trovasi posto nell'intervallo che separa le due falde della iperboloide; ma conducendo un piano parallelo ad esso e lontano abbastanza dal centro, si avrebbe una sezione reale e *circolare*, perchè questa soddisfarebbe, analiticamente, le condizioni della simiglianza colla prima sezione.

220. Nella superficie di che si tratta, non può esservi eguaglianza che tra i due coefficienti negativi P' e P''; e siccome questa ipotesi, introdotta nella formola (8), dà $\theta=90°$, ne segue che il piano secante non ammette che una sola direzione, e quella propriamente che contiene *i due assi eguali* ed immaginari b e c. La superficie è allora *di rotazione* attorno l'asse reale a; e la grandezza di questo, o pure di P, non modifica mai le precedenti conseguenze.

221. Risulta da questa discussione, che per le superficie dotate di un centro, non vi à che due direzioni per le quali un piano secante menato pel centro, possa tagliare la superficie *secondo un cerchio*. Queste due direzioni sono *perpendicolari ad uno stesso piano principale*, e tutti i piani paralleli all'una o all'altra di queste direzioni forniscono due serie di sezioni circolari, i cui centri esistono su due diametri che trovansi nel detto piano principale (n° 193).

Nell'ellissoide questi piani secanti passano per l'*asse medio*.

Nell'iperboloide ad una falda passano pel *maggiore dei due assi reali*.

Finalmente nell'iperboloide a due falde passano pel *maggiore dei due assi immaginari*. E in tutte tre le superficie le due serie delle sezioni circolari si riducono ad una sola, quando la superficie è di rivoluzione.

222. Le conseguenze e le formole trovate nel n° 213 si applicano bensì ad un cono qualunque di secondo grado, perchè ad ottenere questa superficie basta supporre $H=0$ nell'equazione (1), e d'altronde i valori di θ e di φ sono indipendenti da H. È questa la ragione onde in un cono obliquo *a base circolare EBD* (*fig.* 28), al di più delle sezioni parallele alla base, esistono altre sezioni dette *antiparallele*, che sono egualmente circolari (*a*); ed è facile trovare graficamente in tal caso *i piani principali*, e le direzioni degli *assi* di questo cono, comunque sian nulle le lunghezze di questi assi (138). Difatti, la retta OI su cui esistono i centri di una serie di sezioni circolari, è un diametro della superficie, e pel n° 221 devesi trovare in un piano principale perpendicolare al cerchio DE; dunque si avrà questo piano principale facendolo passare per OI, e per la perpendicolare

(*a*) Veggasi *l'applicazione dell'algebra alla geometria* di Lacroix al n° 153, o pure la *Geometria descrittiva* del sig. Leroy al n° 732.

OP abbassata sulla base. Ciò posto, il piano principale POI produce nel cono i due lati OD, OE; e la retta OA, che divide per metà l'angolo compreso da questi lati, è necessariamente *uno degli assi principali* della superficie: dal che segue che il piano OAB, menato ad angolo retto su POI, è il secondo piano principale, e che il terzo dovrà essere condotto dal centro O perpendicolarmente ai due primi. E le intersezioni di questi tre piani saranno gli assi principali della superficie conica in discorso.

223. Vediamo ora se v'abbiano sezioni circolari nelle due paraboloidi rappresentate l'una e l'altra dall'equazione

$$(11) \qquad p'y^2 + pz^2 = pp'x\,,$$

dato che p' si ritenga negativo quando trattasi della paraboloide iperbolica.

Se conduciamo il piano secante per la origine delle coordinate, la quale in questo caso è il vertice della superficie, la sezione riferita ad assi *rettangolari* posti nel suo piano verrà data dalla sostituzione delle formole

$$x = x' \cos\varphi + y' \cos\theta \operatorname{sen}\varphi\,,$$
$$y = x' \operatorname{sen}\varphi - y' \cos\theta \cos\varphi\,,$$
$$z = y' \operatorname{sen}\theta,$$

nell'equazione (11), e sarà

$$(12)\ p'\operatorname{sen}^2\varphi . x^2 - 2p'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta . xy + (p'\cos^2\varphi\cos^2\theta + p\operatorname{sen}^2\theta)y^2 + Sx + Ty = 0.$$

Ora è noto che acciò questa equazione rappresenti un cerchio, deve soddisfare alle condizioni

$$(13) \qquad p'\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\cos\theta = 0\,,$$
$$(14) \qquad p'\operatorname{sen}^2\varphi = p'\cos^2\varphi\cos^2\theta + p\operatorname{sen}^2\theta.$$

La prima sarebbe verificata dal supporre $\operatorname{sen}\varphi = 0$, ma questo valore si deve rigettare, perchè con esso i coefficienti di x^2 ed y^2 non potrebbero essere uguali senza esser nulli come quello di x^2, e così la sezione non sarebbe più un cerchio. Restano dunque i due seguenti sistemi di valori:

$$(15) \qquad \cos\varphi = 0 \quad \text{con} \quad \operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{\frac{p'}{p}}\,,$$

$$(16) \qquad \cos\theta = 0 \quad \text{con} \quad \operatorname{sen}\varphi = \pm\sqrt{\frac{p}{p'}}.$$

224. Ciò posto, nella paraboloide ellittica p e p' hanno

lo stesso segno, e però i sistemi (15) e (16) sono tutti due reali; ma siccome fa mestieri che ogni seno sia minore dell'unità, non sarà ammessibile che un solo di questi sistemi.

Se dunque si à $p>p'$, bisognerà adottare $\cos\varphi=0$, ed il piano secante passerà per l'asse OY; altronde potrà ricevere due direzioni rappresentate da

$$z=x\tan\theta=\pm x\sqrt{\frac{p'}{p-p'}},$$

e per conseguenza i piani paralleli all'una o all'altra di queste direzioni forniranno *due serie di sezioni circolari.*

Se, al contrario, è $p'>p$, converrà adottare $\cos\theta=0$, talchè il piano secante passerà per l'asse OZ, ed ammetterà le due direzioni espresse da

$$y=x\tan\varphi=\pm x\sqrt{\frac{p}{p'-p}},$$

alle quali corrisponderanno ancora due serie di sezioni circolari, prodotte dai piani paralleli a quelli rappresentati da questa doppia equazione.

Merita poi osservazione che in ambi i casi *i piani dei cerchi sono perpendicolari alla parabola principale di minor parametro.*

225. Nel caso particolare $p=p'$, in cui la paraboloide ellittica è *di rotazione*, i due sistemi (15) e (16) si accordano in dare $\varphi=90°$ con $\theta=90°$. Allora dunque non vi à che una sola serie di sezioni circolari, e i loro piani son tutti *perpendicolari all' asse di rotazione* OX.

226. Quanto alla paraboloide iperbolica, il coefficiente p' è negativo; quindi i due sistemi (15) e (16) divenendo l'uno e l'altro immaginari, *questa superficie non ammetterà veruna sezione circolare:* e ben si poteva prevedere questa conseguenza, rammentando (n° 163) che in questa paraboloide le sezioni piane non sono mai curve *chiuse.* Nondimeno potrebbesi riguardare come un cerchio di raggio infinito la sezione rettilinea fornita dal valore $\varphi=0$, il quale fu da noi escluso dall'equazione (13). Difatti con questo valore l'equazione (14) dà

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{-p'}{p}},$$

risultato che è reale quando p' è negativo, e che riduce l'equazione (12) al primo grado.

227. Le due serie di sezioni circolari che esistono in ogni superficie di secondo grado, tranne la paraboloide iperbolica, presentano tra esse una relazione importante, che Hachette notò il primo: la quale consiste in ciò che *due cerchi qualunque appartenenti a serie diverse, trovansi mai sempre situati sopra una medesima sfera.* Siano difatti AE e $B'E'$ (*fig.* 29) due cerchi non paralleli, che dovendosi trovare (n° 221) perpendicolari ad uno stesso piano principale, possono rappresentarsi colle semplici loro proiezioni su questo piano. Elevando dal centro I una perpendicolare IC al cerchio AE, e cercando su questa retta un punto C egualmente lontano da E' e da E, si avrà il centro della sfera che passerà per la circonferenza AE e pel punto E'. Ciò posto, questa sfera avendo di comune colla superficie di secondo grado una curva piana AE, non potrà tagliarla di nuovo (n° 206) che secondo una curva piana passante per E', e che sarà necessariamente un cerchio, perchè trovasi pure sulla sfera. Questa curva di uscita dovrà dunque coincidere con una delle due sezioni circolari $E'B'$, $E'A'$, che sole possono passare per E' sulla superficie di secondo grado; ma bisogna evidentemente escludere la circonferenza $E'A'$ parallela ad EA, perchè in una sfera due cerchi paralleli hanno sempre i loro centri sopra un medesimo diametro perpendicolare ai loro piani, mentre qui il diametro IOI' essendo coniugato colle corde $AE, A'E'$, non potrebbe incontrarli ad angolo retto, ammeno che la superficie non fosse di rotazione, nel qual caso i cerchi $A'E'$, e $B'E'$ coincidono l'uno con l'altro. È dunque certo che la circonferenza $B'E'$ sarà sempre la curva di uscita, e che perciò devesi trovare sopra una medesima sfera col cerchio AE.

CAPITOLO XI.

DEI PIANI DIAMETRALI CONIUGATI OBLIQUI.



228. Nelle superficie dotate di un centro, e che, riferite ai loro piani principali, vengono espresse da

(1) $$Px^2+P'y^2+P''z^2=H,$$

abbiamo notato che questi piani, fra loro perpendicolari, erano coniugati a vicenda, cioè a dire che *ciascuno divideva per metà le corde parallele alla intersezione degli altri due;* ma siccome avvi (n° 106) una infinità di piani diametrali obliqui alle loro corde, si può prevedere che, fra tutti questi piani, ve ne saranno di quelli che presi a tre a tre, formeranno ancora un sistema di piani coniugati. Affine di ritrovarli io conduco pel punto O (*fig.* 30) un piano diametrale

(2) $$Rx+Sy+Tz=0,$$

con direzione arbitraria, solo che tagli la superficie secondo una curva ABD dotata di centro. Cerco il diametro OZ' coniugato al detto piano, ed a tal fine osservo che l'attuale equazione (1) paragonata all'equazione (1) del n° 105 dà

(3) $$mPx+nP'y+P''z=0$$

per equazione del piano coniugato relativo al diametro OZ', che suppongo espresso dall'equazioni

(4) $$x=mz,\ y=nz;$$

e siccome l'equazione (3) identificata con (2) dà

$$\frac{mP}{R}=\frac{nP'}{S}=\frac{P''}{T},$$

saranno queste l'equazioni che determinano m ed n. Ciò posto, i piani che saranno coniugati con ABD passeranno, in virtù della loro definizione, per OZ', e taglieranno il piano ABD in due rette incognite OX', OY', tali che prese con OZ' per assi coordinati obliqui, l'equazione della superficie non presenterà che *potenze pari* delle tre variabili (n° 102), e quindi sarà della forma

(5) $$Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2=K;$$

ma se allora si ponesse $z'=0$, il risultato

$$Ax'^2+A'y'^2=K$$

sarebbe l'equazione della sezione ABD riferita agli assi incogniti OX', OY'. Ma questa equazione dimostra colla sua forma che questi assi debbono essere *due diametri coniugati* qualunque della curva ABD; dunque se ne desume che tracciando ad arbitrio due diametri di questo genere, i tre risultanti piani $X'OY', X'OZ', Y'OZ'$ saranno coniugati della superficie. Pertanto il numero dei sistemi o terni di diametri coniugati che avranno di comune il diametro OZ' ed il piano ABD, sarà infinito, e le stesse conseguenze avran luogo per le diverse posizioni che piacerà dare a questo primo piano.

229. Importa osservare 1.° che quando il piano diametrale ABD è perpendicolare ad uno dei diametri principali della superficie, il diametro coniugato OZ' giace necessariamente in questo piano principale, come ad evidenza risulta dalla forma che allora prendono l'equazioni (3) e (4); 2.° che lasciando arbitraria la direzione del piano ABD, gli altri due piani ad esso coniugati potranno passare per gli assi principali di questa sezione, ed allora fra i tre diametri coniugati OX', OY', OZ', i due primi soltanto saranno perpendicolari fra loro; 3.° che se si sceglie per piano ABD una delle tre sezioni principali della superficie, il diametro corrispondente OZ' sarà necessariamente un asse principale, e i due angoli $Z'OX', Z'OY'$ saranno retti, laddove il terzo potrà essere qualunque. Ma si può affermare che i tre diametri non saranno mai perpendicolari ciascuno agli altri due se non quando coincideranno col sistema degli *assi principali*, il quale è sempre un solo (n° 118) quando la superficie non è di rivoluzione.

230. Nella iperboloide ad una falda il primo piano diametrale ABD potrebbesi trovar diretto parallelamente alle sezioni paraboliche, ed allora la curva ABD si ridurrebbe a due rette; ma un tal piano sarebbe disadatto a fornire un sistema di piani coniugati, perchè il diametro OZ', ad esso corrispondente, giacerebbe (n° 194) nel medesimo piano.

Quanto poi all'iperboloide a due falde, il piano ABD condotto pel centro potrebbe dare una sezione immaginaria; ma in tal caso basterebbe prendere OX' ed OY' paralleli a due diametri coniugati di una sezione reale e parallela ad ABD; poichè supponendo nell'equazione (5), $z'=h$ in vece di $z'=0$, non lasciano di essere applicabili gli stessi ragionamenti.

231. Dietro le relazioni trovate nei n[i] 228 e 229 fra tre diametri coniugati, si può facilmente estendere alle superficie di secondo ordine le conosciute proprietà di che godono i quadrati e i parallelogrammi fatti su i diametri coniugati delle curve dello stesso ordine.

Siano OX, OY, OZ (*fig.* 30 *bis*) le direzioni degli assi principali a,b,c di una superficie di secondo grado, potendo ancora essere immaginari uno o due di questi assi. La superficie verrà espressa per l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

ed anche per

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1$$

quando è riferita a tre diametri coniugati qualunque

$$OX'=a'\ ,\ OY'=b'\ ,\ OZ'=c'.$$

Ciò posto (*), se noi sostituiamo a questo sistema i tre diametri

$$OX''=a''\ ,\ OY''=b''\ ,\ OZ'=c',$$

i due primi de' quali siano coniugati fra loro nel piano $X'OY'$, ed uno, a'', sia l'intersezione di questo piano con XOY, otterremo (n° 228) un secondo sistema di tre diametri coniugati della superficie; ma i diametri a' e b', a'' e b'', appartenendo alla stessa curva, cioè alla sezione prodotta nella superficie dal piano $X'OY'$, avranno tra essi la nota relazione

$$(6)\qquad a'^2+b'^2=a''^2+b''^2,$$

e devesi notare che il piano $Y''OZ'$ conterrà (n°229) l'asse OZ, perchè il diametro OX'' giace nel piano principale XOY. Frattanto noi avremo tuttavia tre diametri coniugati se, conservando $OX''=a''$, rimpiazzeremo gli altri b'' e c' con due nuovi diametri coniugati posti nel medesimo piano $Z'OY''$, e tali che uno, $OY'''=b'''$, sia l'intersezione di questo piano con XOY; ma allora a'' e b''' trovandosi tutti due nel piano

(*) Questa dimostrazione è dovuta al signor Binet. (Veggasi la *Corrispondenza sulla Scuola Politecnica*, vol. II., pag. 79).

principale XOY, il coniugato di b''' dovrà (n° 229) coincidere coll' asse principale $OZ = c$, talchè questo terzo sistema

$$OX'' = a'' \ , \ OY''' = b''' \ , \ OZ = c,$$

avendo un diametro comune col precedente, darà, fra gli altri che appartengono alla stessa curva sita nel piano $Z'OY''$ o vero ZOY''', la relazione

$$(7) \qquad b''^2 + c'^2 = b'''^2 + c^2.$$

Finalmente, se paragoniamo il terzo sistema con quello degli assi principali

$$OX = a \ , \ OY = b \ , \ OZ = c,$$

vi sarà un diametro comune, c, e gli altri, considerati a due a due, essendo diametri coniugati della sezione prodotta dal piano XOY, forniranno la relazione

$$(8) \qquad a''^2 + b'''^2 = a^2 + b^2.$$

Adunque sommando l'equazioni (6), (7), (8) avremo

$$(9) \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2:$$

risultato il quale ci mostra che *nelle superficie di secondo grado, la somma dei quadrati di tre diametri coniugati qualunque è costantemente uguale alla somma dei quadrati dei tre assi principali.* Nondimeno, quando uno o due degli assi saranno immaginari, altrettanti dei diametri coniugati saranno immaginari, e nell' equazione (9) si dovranno cambiare i segni dei quadrati di questi assi e di questi diametri.

232. Mediante le stesse considerazioni si può dimostrare che *il volume del parallelepipedo costruito su tre diametri coniugati, eguaglia il volume di quello che sarebbe costruito sui tre assi principali.* Difatti colla medesima successione di diametri testè adoperata, e dinotando ciascun parallelepipedo coi suoi tre lati, abbiamo sulle prime

$$\text{vol.}\,(a',b',c') = \text{vol.}\,(a'',b'',c'),$$

perchè questi due solidi hanno la stessa altezza e basi equivalenti, le quali sono i parallelogrammi costruiti sui due sistemi di diametri a' e b', a'' e b'', che appartengono alla stessa curva situata nel piano $X'OY'$. Per consimili ragioni abbiamo

$$\text{vol.}\,(a'',b'',c') = \text{vol.}\,(a'',b''',c) = \text{vol.}\,(a,b,c);$$

di che si raccoglie

$$\text{vol.}\,(a',b',c') = \text{vol.}\,(a,b,c).$$

Si vedrà poi nel capitolo dei piani tangenti che i parallelepipedi così formati son tutti *circoscritti* o *iscritti* alla superficie di secondo grado.

233. Riguardo alle superficie mancanti di centro e comprese nell'equazione

$$(10) \qquad p'y^2 + pz^2 = pp'x\ ,$$

la formola generale del piano diametrale essendo

$$(11) \qquad 2np'y + 2pz = mpp'\ ,$$

si scorge che tutti i piani di questo genere sono paralleli all'asse OX; per conseguenza le loro vicendevoli intersezioni, che chiamansi *diametri* della superficie, son rette parallele tra loro, e quindi non possono formare un sistema di assi coordinati: val quanto dire, *tre piani diametrali comunque scelti non possono mai essere coniugati fra loro* (n° 102).

Ma se vogliansi trovare tre piani coordinati obliqui analoghi a quelli dell'equazione (10), cioè a dire che *due siano diametrali*, e tali che ciascuno di essi sia coniugato rispetto alle corde parallele alla intersezione degli altri due, si prenderà ad arbitrio un primo piano diametrale della forma

$$(12) \qquad Ry + Sz = T\ ,$$

il quale taglierà necessariamente la superficie secondo una parabola $AO'B$ (*fig* 31); e poscia identificando l'equazioni (11) e (12), si valuteranno le costanti m ed n che determinano la direzione delle corde coniugate ad $AO'B$. Dopo ciò, menando per un punto qualunque O' un asse $O'Z'$ parallelo a queste corde, i due altri piani cercati dovranno passare per $O'Z'$ e tagliare il piano $AO'B$ in due rette ignote $O'X'$, $O'Y'$, tali che l'equazione della superficie riferita a questi assi non contenga potenze dispari nè di y nè di z, ovvero che abbia la forma

$$P'y'^2 + P''z'^2 = Qx'.$$

Ora in questa supponendo $z'=0$, si trova per la curva $AO'B$

$$P'y'^2 = Qx'\ ,$$

equazione la cui forma dimostra che i due assi incogniti OX' ed OY' debbono essere un diametro della parabola $AO'B$, e la tangente che gli corrisponde. Così dunque la posizione

del secondo piano diametrale $Z'O'X'$ risulta determinata, egualmente che quella del terzo piano coordinato $Z'O'Y'$; ma siccome il punto O' fu preso ad arbitrio nella parabola $AO'B$, vi saranno infiniti sistemi che avranno di comune il piano di questa curva. A suo luogo poi vedremo che il piano non diametrale $Z'O'Y'$ è tangente della superficie.

CAPITOLO XII.

DISCUSSIONE IMMEDIATA DI UNA EQUAZIONE NUMERICA DI SECONDO GRADO.



234. Noi ci proponghiamo qui di stabilire dei caratteri i quali possano far distinguere, indipendentemente dalla trasformazione delle coordinate, il genere e la forma particolare di una superficie di secondo grado, espressa da una equazione in coordinate *rettangolari* od *oblique*, i coefficienti della quale son numeri cogniti e reali. Sia pertanto

$$(1)\qquad \left.\begin{array}{l} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+E \end{array}\right\}=0$$

questa equazione. Converrà innanzi tratto cercare col metodo tenuto nel n° 95 se la superficie abbia centro, e valutar le coordinate di questo punto. Si porranno dunque a tal fine l'equazioni

$$(2)\qquad Ax_1+B'z_1+B''y_1+C=0\,,$$
$$(3)\qquad A'y_1+Bz_1+B''x_1+C'=0\,,$$
$$(4)\qquad A''z_1+By_1+B'x_1+C''=0\,,$$

dalle quali si avranno per le coordinate del centro

$$x_1=\frac{N}{D}\,,\; y_1=\frac{N'}{D}\,,\; z_1=\frac{N''}{D}\,,$$

valori nei quali

$$D=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''\,,$$

e dove i numeratori avrebbero una forma che noi abbiamo notata nel n° 95, ma che qui sarebbe inutile a richiamare, perchè nei singoli esempi riesce in generale più semplice il risolvere *direttamente* l'equazioni numeriche (2), (3), (4), che il ricorrere a formole letterali, dove alcune volte s' incontrano delle indeterminazioni le quali non sono che apparenti.

Ciò posto, siccome le coordinate del centro possono esser tutte *finite e determinate*, o pure alcune trovarsi *infinite* o *indeterminate*, noi divideremo la discussione in due casi principali.

Primo caso: $D \gtrless 0$.

235. In questo caso la superficie (1) ammette *un solo centro*, e se nel medesimo si trasportano gli assi parallelamente alle loro direzioni, l'equazione della superficie diviene

$$(5) \qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=H,$$

dove noi sappiamo (n° 95) che tutti i coefficienti sono gli stessi che in (1), tranne il termine costante H che, passato nel secondo membro, avrebbe per valore

$$H=-\left\{\begin{array}{l} Ax_1^2+A'y_1^2+A''z_1^2+2By_1z_1+2B'z_1x_1+2B''x_1y_1 \\ \qquad +2Cx_1+2C'y_1+2C''z_1+E. \end{array}\right.$$

Ma questa espressione può esser molto abbreviata per virtù dell'equazioni (2), (3), (4); perchè moltiplicando quest'ultime rispettivamente per x_1, y_1, z_1, e poscia unendole al valore di H, questo diverrà

$$H=-Cx_1-C'y_1-C''z_1-E:$$

espressione facile ad esser calcolata quando si conoscono i valori numerici delle coordinate x_1, y_1, z_1. D'altra parte, per abbreviare la discussione, noi ammetteremo sempre in ciò che segue, che siasi avuto cura di rendere positivo nel secondo membro il termine costante H.

236. Ciò posto, se la quantità H trovasi nulla, la superficie proposta è *un cono* o pure *un punto solo*. Difatti combinando l'equazione (5) liberata dal secondo membro con quella di un piano qualunque menato per la origine,

$$z=\alpha x+\beta y,$$

è visibile, anche senza effettuare i calcoli, che il risultato avrebbe la forma omogenea

$$ay^2+bxy+cx^2=0, \text{ d'onde } \frac{y}{x}=p\pm\sqrt{q}.$$

Or questi valori costanti dimostrano che tutte le sezioni consistono in *due rette che passano sempre per la origine*, e che perciò la superficie è un cono, il quale nondimeno si ridurrebbe ad un punto solo $x=0$, $y=0$, $z=0$, se il

radicale fosse costantemente immaginario, sotto valori qualunque di α e β. Ma quest'ultimo caso può essere riconosciuto, indipendentemente dal calcolo del radicale, esaminando se un piano, come a dire $z=k$, dà una sezione immaginaria.

237. Quando il termine costante H non è nullo; l'equazione (5) non può rappresentare che una ellissoide, o pure una delle due iperboloidi: superficie che differiscono tra loro pel numero degli assi reali o immaginari che ammettono. Noi dunque cercheremo una relazione tra quest' assi e i coefficienti dell'equazione (5), supponendo da principio che le coordinate siano *rettangolari*; ma poscia faremo vedere che le regole così ottenute si applicano egualmente alle coordinate *oblique*.

Gli *assi* di una superficie essendo (n° 104) le intersezioni vicendevoli dei piani principali, non differiscono dalle *tre corde principali* che passano pel centro, e la cui direzione vien determinata dalle costanti m ed n adoperate nel n° 109. Una qualunque di tali corde è dunque rappresentata dall'equazioni

$$x = mz \ , \ y = nz,$$

e combinandole con (5), si ottiene pel punto d'incontro colla superficie proposta,

$$z^2 = \frac{H}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn};$$

dal che segue che chiamando R la lunghezza di questa semi-corda principale, *reale* o *immaginaria*, si avrà pel quadrato di uno qualunque dei tre *semiassi* della superficie

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 = (m^2 + n^2 + 1)z^2,$$

ossia

$$(6) \qquad R^2 = \frac{H(m^2 + n^2 + 1)}{Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn}.$$

Ora i valori delle costanti m ed n, e quello dell'ignota ausiliare s da cui abbiamo fatto dipendere i primi, sono determinati (n° 109) per l'equazioni

$$(7) \qquad Am + B' + B''n = ms,$$
$$(8) \qquad A'n + B + B''m = ns,$$
$$(9) \qquad A'' + Bn + B'm = s,$$

le quali mediante l'eliminazione di m ed n ci danno

$$(10) \quad s^3 - s^2(A + A' + A'') - s(B''^2 - AA' + B'^2 - AA'' + B^2 - A'A'') + (AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'') = 0.$$

Ma, d'altra parte, sommando l'equazioni (7), (8), e (9), dopo avér moltiplicata la prima per m e la seconda per n, si trova

$$s=\frac{Am^2+A'n^2+A''+2Bn+2B'm+2B''mn}{m^2+n^2+1}:$$

risultamento che paragonato alla formola (6) dà questa notevole relazione

$$(11). \qquad s=\frac{H}{R^2}.$$

Da ciò dunque si raccoglie che le tre radici dell'equazione (10) sono sempre

$$s'=\frac{H}{a^2},\ s''=\frac{H}{b^2},\ s'''=\frac{H}{c^2},$$

dinotando con a,b,c i valori *analitici* dei tre semiassi della superficie (5), cioè a dire le distanze del centro ai punti *reali* o *immaginari* dove la superficie incontra i tre diametri principali; talchè se si risolvesse l'equazione (10), si potrebbe calcolare facilmente le lunghezze dei tre assi, e poscia fissare le loro posizioni mediante i valori di m ed n che corrisponderebbero in (7) e (8) a ciascun valore di s. Ma per lo scopo nostro basta osservare che l'espressione analitica di ciascuno dei semiassi, non potendo avere che la forma α, o pure $\alpha\sqrt{-1}$, il quadrato R^2 non ammetterà che valori *reali* positivi o negativi: di che si raccoglie 1.° che *l'equazione* (10) *à sempre reali le sue tre radici* (come già l'avevamo riconosciuto nel n° 117 e nella nota del numero 109); 2.° che *ciascuna radice positiva indica l'esistenza di un asse reale*, e che *ciascuna radice negativa corrisponde ad un asse immaginario*, poichè abbiamo supposto che il termine H sia stato reso positivo. Or siccome il numero delle radici positive o negative può essere fissato, mediante la regola di Cartesio, colla semplice ispezione dell'equazione (10) e senza punto risolverla, potremo desumere da quanto si è detto le seguenti regole pratiche.

238. Coi coefficienti numerici dell'equazione (5), in cui si suppone che il termine costante H passato nel secondo membro sia *positivo*, si formerà immediatamente l'equazione (10), e si esaminerà qual sia il numero delle variazioni e delle permanenze di segni che presentano i di lei termini: dopo ciò

1.° Se l'equazione (10) offre *tre variazioni*, tutte le sue radici saranno certamente positive. Allora dunque la superficie (5) ammetterà *tre assi reali*, e sarà una ELLISSOIDE.

2.° Se l'equazione (10) presenta *due variazioni* ed *una permanenza*, avrà due radici positive ed una negativa; donde si concluderà che la superficie (5) ammette *due assi reali* ed *uno immaginario*, e sarà per conseguenza *una IPERBOLOIDE ad una falda.*

3.° Quando l'equazione (10) offre *una variazione* e *due permanenze*, à una radice positiva e due negative. Allora dunque la superficie (5) ammette *un solo asse reale* e *due immaginari*, ed è pertanto una *IPERBOLOIDE a due falde.*

4.° Finalmente, quando l'equazione (10) non presenta che *permanenze* di segni, tutte le sue radici sono negative, e però gli assi della superficie (5) son *tutti tre immaginari;* di che si conchiude che *questa superficie è essa stessa immaginaria*, e che l'equazione (5) è assurda, egualmente che l'equazione (1) data primitivamente (*).

239. *Queste regole sono applicabili ancora alle coordinate oblique.* Difatti, supponghiamo costruita la superficie S, cui appartiene l'equazione (5) in coordinate oblique; indi, per ciascun punto M (*fig.* 1) di questa superficie facciamo rotare le due coordinate $DC=y$, $CM=z$, sino a renderle perpendicolari tra esse ed alla $OD=x$ che resterà immobile: per tal modo il punto M prenderà un'altra posizione M', di cui le coordinate rettangolari x', y', z' avranno le stesse grandezze delle x, y, z; ora l'insieme di tutti questi novelli punti M' costituisce una seconda superficie S', che sarà eziandio rappresentata evidentemente dall'equazione (5) coi medesimi coefficienti, ma colle coordinate x', y', z' in vece di x, y, z, e si può affermare che questa superficie S' è sempre dello stesso genere che l'altra S: poichè se quest'ultima è una ellissoide, è chiaro che anche S' sarà una superficie chiusa dappertutto; se S è una iperboloide ad una falda, bensì la S' avrà una falda sola e indefinita; e in fine se S

(*) Questa maniera di discussione fu la prima volta indicata dal signor Petit, ma questo geometra pervenne alla relazione (11) considerando i semi-assi come i valori *massimo e minimo* dei raggi vettori menati dal centro. Ora ciò è poco soddisfacente per l'asse *medio* dell'ellissoide, e per gli assi immaginari delle iperboloidi.

presenta due falde separate con un intervallo immaginario da $x=+a$ sino ad $x=-a$, avverrà lo stesso per la superficie S'. Adunque le regole del n° 238, applicate direttamente all'equazione (5) in coordinate oblique, basteranno pure ad assegnare *il genere* della superficie S', e quello in conseguenza della superficie S; ma *la posizione* e *la grandezza* degli assi di quest'ultima non saranno più determinate dall'equazioni (7), (8), (10) ed (11).

240. Ecco alquanti esempi di queste discussioni numeriche. L'equazione

$$x^2+2y^2+3yz-2xy-6x+7y+6z+7=0$$

dà per equazioni corrispondenti alle (2), (3) e (4) del n° 234,

$$\left.\begin{array}{l} 2x-2y-6=0\,, \\ 4y+3z-2x+7=0\,, \\ 3y+6=0\,, \end{array}\right\} \text{donde} \begin{array}{l} x_1=1\,, \\ y_1=-2\,, \\ z_1=1\,. \end{array}$$

Queste coordinate del centro sostituite nella proposta danno $H=0$. Così la superficie riferita al suo centro diviene

$$x^2+2y^2+3yz-2xy=0\,, \qquad (a)$$

e quindi non potrebb'essere (n° 236) che *un cono* o pure *un punto;* ma siccome ponendo $z=k$ si à

$$x^2-2xy+2y^2+3ky=0\,,$$

ed in conseguenza

$$x=y\pm\sqrt{-y(y+3k)}\,,$$

questa sezione è una ellisse che non si riduce ad *un punto*, perchè i due fattori del radicale sono *ineguali*; e con ciò la superficie è deffinitivamente un cono. Questa conseguenza potevasi desumere dalla circostanza che l'equazione (*a*) trovasi verificata da $x=0$, $y=0$, il che dimostra che la superficie ammette una linea reale, cioè l'asse delle z.

241. Sia ora l'equazione

$$2x^2+5y^2+3z^2+2yz-4zx-2xy+2x+8y-6z-13=0.$$

Per determinare le coordinate del centro si hanno l'equazioni

$$\left.\begin{array}{l} 4x-4z-2y+2=0 \\ 10y+2z-2x+8=0 \\ 6z+2y-4x-6=0 \end{array}\right\} \text{donde} \begin{array}{l} x_1=1\,, \\ y_1=-1\,, \\ z_1=2\,, \end{array}$$

e dall'ultima espressione di H del n° 235 si ottiene $H=10$; talchè l'equazione rapportata al centro diventa

$$2x^2+5y^2+3z^2+2yz-4zx-2xy=10.$$

Ora componendo, mercè quest'ultima, l'equazione (10), si trova

$$s^3-10s^2+25s-9=0,$$

equazione che presenta tre variazioni di segni, e con ciò dimostra che la superficie in quistione è un'ellissoide.

242. Sia finalmente l'equazione

$$yz+zx+xy-x-2y-3z+2+a=0;$$

le tre che danno le coordinate del centro, sono

$$\left.\begin{array}{l} z+y-1=0, \\ z+x-2=0, \\ y+x-3=0, \end{array}\right\} \text{ e però } \begin{array}{l} x_1=2, \\ y_1=1, \\ z_1=0. \end{array}$$

Quindi l'equazione riferita al centro diviene, supponendo a positivo,

$$-yz-zx-xy=a;$$

e se questa, per formare l'equazione (10), si moltiplica per 2 affine di evitare le frazioni, verrà

$$s^3-3s+2=0.$$

Qui manca un termine, ma pure scrivendolo col coefficiente ± 0, si trovano sempre due variazioni ed una permanenza; di che si desume che la superficie proposta è una *iperboloide ad una falda*.

Si troverebbe l'altra iperboloide quando a fosse negativo, perchè allora bisognerebbe cangiare i segni dei rettangoli, affine di rendere positivo il secondo membro, conforme alle regole dichiarate nel n° 238.

SECONDO CASO : $D=0$.

243. Le superficie che adempiono questa condizione mancano di centro, o pure ne hanno infiniti. Quindi non possono essere che paraboloidi, cilindri parabolici, cilindri ellittici o iperbolici, o pure il sistema di due piani paralleli. Noi dunque cercheremo i caratteri propri a distinguere gli uni dagli altri questi quattro generi, partendo dall'equazione primitiva (1), e dall'equazioni (2), (3), (4) del centro; e siccome ci tornerà utile il considerare le sezioni parallele ai piani coordinati, osserviamo qui che la natura

di queste sezioni verrà sempre indicata dai segni dei binomi

$$B''^2-AA'=\beta'', B'^2-AA''^2=\beta', B-A'A''=\beta,$$

che sono analoghi al binomio b^2-4ac nelle curve di secondo grado. Altronde si deve prevedere che per una medesima superficie data, questi tre binomi si troveranno *tutti positivi* o *tutti negativi*, ciò che non esclude l'ipotesi che alcuni o tutti siano nulli.

244. In una paraboloide deve accadere che almen *una delle coordinate del centro sia infinita*, e che però la risoluzione immediata dell'equazioni (2), (3), (4) presenti una impossibilità, come per esempio $5=0$. Per verità sembra che tutte tre le coordinate dovrebbero essere infinite; ma se si osservi che una paraboloide si può riguardare come una degenerazione dell'ellissoide o dell'iperboloide, nelle quali le due sezioni principali che passano per un medesimo asse reale si volterebbero in parabole, si resterà convinto che il centro comune di queste due curve, allontanandosi indefinitamente, non à dovuto escire dall'asse reale che è divenuto l'asse unico della paraboloide. Or se questa retta trovasi, per esempio, parallela al piano coordinato XY, è chiaro che si avrà soltanto $x_1=\infty$, e $y_1=\infty$, laddove z_1 avrà un valore determinato; e se l'asse principale della paraboloide è parallelo ad OX, le coordinate y_1 e z_1 avranno valori determinati, laddove x_1 solo sarà infinito. Inoltre, poichè le sezioni *paraboliche* non possono esser prodotte (n[i] 159 e 163) che da piani paralleli all'asse della paraboloide, ed è apertamente impossibile che i tre piani coordinati siano ad un tempo paralleli a questa retta, si può affermare che i tre binomi β, β', β'' non saranno mai nulli nel tempo stesso. Quindi, siccome noi andiamo a vedere che le condizioni precedenti non si verificano simultaneamente nelle altre specie di superficie di secondo grado, possiamo conchiudere che i caratteri distintivi delle paraboloidi sono i seguenti:

una dell'equazioni del centro *impossibile*,

uno dei binomi $(\beta,\beta',\beta'') \gtrless 0$;

e precisamente, se quello di tali binomi che non è nullo trovasi *negativo*, la paraboloide sarà ellittica; e sarà *iperbolica* se il binomio che non è nullo sarà *positivo*.

245. In un cilindro *parabolico* almen una delle coordinate del centro dev' essere *infinita*; cioè a dire che la risoluzione dell'equazioni (2), (3), (4) deve condurre ad una impossibilità, quale sarebbe per esempio $5=0$. Inoltre, un piano qualunque non potendo dare per sezione che una parabola, o due rette parallele, o una retta isolata, avverrà necessariamente che i tre binomi β, β', β'' saranno tutti nulli. Adunque i caratteri distintivi del genere attuale saranno

una dell'equazioni del centro *impossibile*,
i tre binomi $(\beta, \beta', \beta'') = 0$.

246. Cilindro *ellittico* o *iperbolico*. Questa superficie ammette per centri tutti i punti di una medesima retta, cioè ammette *un asse centrale;* per conseguenza una delle coordinate del centro deve rimanere arbitraria, senza che veruna delle altre sia infinita; il che val dire che i valori di x e y, per esempio, cavati da due dell'equazioni (2), (3), (4), debbono rendere identica la terza equazione, qualunque sia z. Di più, siccome i tre piani coordinati non potrebbero esser tutti paralleli alle generatrici del cilindro, dovrà accadere che almen uno dei binomi β, β', β'' sia diverso da zero; ed allora il segno di questo binomio farà distinguere se il cilindro è *ellittico* o pure *iperbolico*. Pertanto i caratteri propri di questo genere sono

l'equazioni del centro *ridotte a due*,
uno dei binomi $(\beta, \beta', \beta'') \gtrless 0$;

d'altra parte se, per esempio, è β'' che differisce da zero, bisognerà porre $z=k$ nell'equazione (1), indi vedere se questa sezione è *immaginaria*, o pure si riduce ad *un punto*, o in fine si decompone in *due rette*; perchè nel primo caso il cilindro sarà totalmente *immaginario*, nel secondo si ridurrà ad *una retta sola*, e nel terzo sarà il sistema di *due piani non paralleli.*

247. Due piani *paralleli.* In questo caso esiste un *piano centrale*, di cui tutti i punti sono altrettanti centri; pertanto due delle coordinate del centro resteranno *arbitrarie*, e ciò si renderà manifesto dacchè il valore di x, per esempio, cavato da una dell'equazioni (2), (3), (4), verificherà l'altre due, qualunque siano y e z. Altronde tutte le sezioni piane dovendo essere in questo caso due rette parallele, i tre bi-

nomi β, β', β'' saranno tutti nulli. Adunque i caratteri per distinguere il genere attuale sono

le tre equazioni del centro *ridotte ad una*,
i tre binomi $(\beta,\beta',\beta'')=0$.

Inoltre siccome i due piani potrebbero *confondersi in uno*, o trovarsi *immaginari*, bisognerà tagliare la superficie (1) con un piano come $z=k$ o $y=k'$, per vedere se la sezione offre due rette confuse in una sola, o pure due rette immaginarie.

248. Esempi. Sia in primo luogo

$$x^2-2y^2-3yz+3zx+xy+4z=0.$$

L'equazioni del centro saranno

$$2x+3z+y=0,$$
$$-4y-3z+x=0,$$
$$-3y+3x+4=0;$$

e siccome l'ultima tolta dalla somma dell'altre due conduce a $4=0$, questa impossibilità dimostra che la superficie è sprovveduta di centro. Dippiù si trova

$$B''^2-AA'=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2:$$

risultato che essendo diverso da zero, e positivo, fa vedere che la superficie è una paraboloide iperbolica.

249. Sia ora

$$x^2+y^2+9z^2+6yz-6zx-2xy+2x-4z=0.$$

L'equazioni del centro saranno

$$2x-6z-2y+2=0,$$
$$2y+6z-2x=0,$$
$$18z+6y-6x-4=0;$$

e siccome le due prime conducono a $2=0$, questa impossibilità è indizio che la superficie manca di centro. Ma in questo caso trovasi

$$B''^2-AA'=0\ ,\ B'^2-AA''=0\ ,\ B^2-A'A''=0\ ;$$

dunque si conchiude che la superficie è un cilindro parabolico.

250. Nell'esempio

$$x^2+3y^2+4z^2-6yz-2zx=a\ ,$$

le tre equazioni del centro sono

$$2x-2z=0\,,$$
$$6y-6z=0\,,$$
$$8z-2x-6y=0.$$

Pertanto, siccome la terza è verificata identicamente dai valori $x=z$, $y=z$ desunti dall'altre due, l'equazioni del centro *si riducono a due*, e così la superficie è un *cilindro dotato di centri*. Ma d'altra parte facendo $z=0$ nell'equazione proposta, ritrovasi

$$x^2+3y^2=a\,;$$

dunque se a è positivo, la superficie rappresenta un *cilindro a base ellittica*; se $a=0$, la sezione riducesi ad un punto, e la superficie ad *una retta sola*; e finalmente se a è negativo, la sezione diventa *immaginaria*, e tale bensì la superficie.

251. Sia finalmente la superficie

$$x^2+4y^2+z^2+4yz-2zx-4xy+3x-6y-3z=0.$$

L'equazioni del centro saranno

$$2x-2z-4y+3=0,$$
$$8y+4z-4x-6=0,$$
$$2z+4y-2x-3=0;$$

e siccome esse equivalgono ad *una sola*, il luogo dei centri sarà un piano, e la superficie proposta non potrà essere che il sistema di due piani paralleli al piano centrale. D'altra parte, tagliando questa superficie col piano $z=0$, trovasi un'equazione che risoluta per rapporto ad x dà

$$x=\frac{4y-3}{2}\pm\frac{3}{2}\,;$$

la sezione è dunque formata da due rette *reali* e *distinte*, e però la superficie è realmente il sistema di due piani paralleli differenti. Difatti, se l'equazione proposta si risolve per rapporto ad una delle variabili, trovasi che essa può essere decomposta in due fattori così

$$(x-2y-z)\,(x-2y-z+3)=0.$$

Caso in cui la superficie è di rivoluzione..

252. Per compiere la discussione dell' equazione generale

$$(1)\qquad \left.\begin{matrix} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+E \end{matrix}\right\} = 0,$$

cercheremo i caratteri onde conoscere quando la superficie sia di *rivoluzione*. In simil genere di superficie tutte le sezioni perpendicolari ad una certa retta sono dei *cerchi i cui centri esistono su quest' asse di rivoluzione*. Ora se in questi cerchi si concepiscano tirate delle corde parallele tra esse, e d' altronde con *direzione arbitraria*, è chiaro che il piano condotto per l' asse di rivoluzione, perpendicolarmente a queste corde, le dividerà tutte in due parti eguali, e sarà un *piano principale*. Reciprocamente, se tutti i piani menati per una stessa retta sono *principali*, le sezioni perpendicolari a questa retta saranno cerchi aventi loro centri su quest' asse; perchè tra le curve di secondo grado, non vi ha che il cerchio il quale ammetta per *diametri principali* tutte le rette menate per un medesimo punto. Da ciò si conclude che per essere di rivoluzione la superficie (1), sia necessario e sufficiente 1.° che v' abbia una infinità di sistemi di corde principali, che siano *tutti paralleli ad un medesimo piano*; 2.° e che nel tempo stesso i piani diametrali, coniugati a questi diversi sistemi, si trovino ad *una distanza finita* e determinata; perchè senza quest' ultima condizione, la prima troverebbesi verificata analiticamente dai cilindri parabolici. Accadrà poi *necessariamente*, come bentosto vedremo, che questi piani principali di numero infinito, s' intersegheranno tutti in una retta sola, che sarà l' asse di rivoluzione.

253. Da un punto qualunque, per esempio dall' origine delle coordinate che noi supponghiamo *rettangolari*, conduciamo una retta parallela ad una corda principale

$$(2)\qquad x=mz\ ,\ y=nz\ ;$$

le costanti m ed n verranno determinate per l'equazioni

$$(3)\qquad \left\{\begin{matrix} Am+B''n+B'=ms\ , \\ A'n+B''m+B=ns\ , \\ A''+B'm+Bn=s\ , \end{matrix}\right.$$

date già nel n° 109, e che menano all' equazione di terzo grado

$$(4)\quad (s-A)(s-A')(s-A'')-B^2(s-A)-B'^2(s-A') \\ -B''^2(s-A'')-2BB'B''=o.$$

In conseguenza ciascuna radice di questa, sostituita nell' equazioni (3) le ridurrà a *due distinte* che daranno i valori di m ed n, i quali dovrebbonsi poscia recare nelle formole (2). O pure, se da quest' ultime si cavino m ed n per sostituirle in (3), la parallela alla corda principale condotta per la origine potrà esprimersi con due qualunque delle tre equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} (A-s)x+B''y+B'z=o, \\ (A'-s)y+B''x+B\,z=o, \\ (A''-s)z+B'\,x+B\,y=o. \end{cases}$$

Ciò posto, se la superficie (1) è di rivoluzione, perchè si trovi adempiuta la prima condizione enunziata nel n° precedente, deve accadere che almen una delle radici di (4) sia tale *che essa riduca l' equazioni* (5) *ad una sola*, che rappresenterà un piano parallelo a tutte le corde principali. Dunque chiamando s' questa radice, essa dovrà soddisfare le relazioni

$$\frac{A-s'}{B''}=\frac{B''}{A'-s'}=\frac{B'}{B},$$
$$\frac{A-s'}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-s'},$$

donde risultano DUE *equazioni di condizione* col valore di s', cioè:

$$(6)\quad A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}=s'.$$

Questo valore di s' rende assai bene soddisfatta l'equazione (4), che d' altronde ammette una seconda radice $s''=s'$; poichè desumendo dalle relazioni (6) l' espressioni di A, A', A'' in funzione di s', e sostituendole in (4), questa equazione prende la forma

$$(s-s')^2\left(s-s'-\frac{B'B''}{B}-\frac{BB''}{B'}-\frac{BB'}{B''}\right)=o;$$

di che si raccoglie che quando le due condizioni (6) sono verificate, vi à *due* dei tre sistemi di corde principali, che

possono essere diretti arbitrariamente nel piano, o parallelamente al piano

(7) $$B'B''x+BB''y+BB'z=0,$$

al quale si riducono allora le tre equazioni (5).

254. Rimane ancora ad esprimere che i piani diametrali coniugati a questi diversi sistemi di corde, si trovino *ad una distanza finita* e *determinata*. Ora uno di questi piani sarà determinato (n° 105) dalla formola generale

$$(Am+B''n+B')\,x+(A'n+B''m+B)\,y+(A''+B'm+Bn)z + Cm+C'n+C''=0,$$

la quale per la radice $s=s'$ che qui consideriamo, e per virtù delle relazioni (3), diviene

(8) $$(s'x+C)m+(s'y+C')n+(s'z+C'')=0.$$

Pertanto è chiaro che acciò questo piano non si trovi a distanza infinita, fa mestieri che s' non sia nulla; talchè le condizioni che esprimono compiutamente che la superficie (1) è di rivoluzione, sono le seguenti:

(9) $$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}\gtrless 0.$$

255. Cerchiamo adesso *l'asse di rivoluzione*, che dev'essere l'intersezione comune di tutti i piani compresi nella formola (8). Qui le grandezze m ed n, che per ciascun valore di s doveano essere determinate da due dell'equazioni (3), non sono più combinate fra esse che per la relazione

(10) $$B'B''m+BB''n+BB'=0,$$

alla quale si riducono quest'equazioni (3) colla radice $s=s'$ che verifica le relazioni (6); talchè eliminando n tra (8) e (10), tutti i piani diametrali che corrispondono a questa radice, saranno dati per l'equazione

$$[B(s'x+C)-B'(s'y+C')]m=B'(s'y+C')-B''(s'z+C''),$$

dove m rimane arbitraria. Dunque per avere una retta comune a tutti questi piani, qualunque sia m, basta eguagliare a zero ciascuno dei due membri, ciò che dà le relazioni

$$B(s'x+C)=B'(s'y+C')=B''(s'z+C''):$$

e queste per conseguenza sono l'equazioni dell'asse di rivoluzione della superficie. Se ora si dividano tutti i termini

per s', e vi si pongano le diverse espressioni di questa grandezza, fornite dalle formole (6), l'equazioni dell'asse di rivoluzione prenderanno la forma (11). . . . . . .

$$B\left(x+\frac{BC}{AB-B'B''}\right)=B'\left(y+\frac{B'C'}{A'B'-BB''}\right)=B''\left(z+\frac{B''C''}{A''B''-BB'}\right)$$

sotto cui ben esprimono una retta perpendicolare al piano (7), e che indica la direzione del terzo sistema di corde principali, il quale debb'esser sempre perpendicolare agli altri due (n° 123).

256. Nondimeno è necessario osservare che quando l'equazione proposta (1) manca di più rettangoli, le condizioni generali (9) prendono una forma incerta, e diverrebbero anche *illusorie* se si fossero fatti sparire i denominatori, *come ordinariamente si pratica*, perchè allora esse verrebbero tutte verificate dalle ipotesi $B=B'=0$, le quali con tutto ciò non bastano perchè la superficie sia di rivoluzione.

Bisogna dunque conservare le condizioni sotto la forma (9), e pel caso in cui si à per esempio $B=0$ e $B'=0$, osservare che le medesime si riducono a

$$(12) \qquad A-\frac{B'}{B}B''=A'' \, , \; A'-\frac{B}{B'}B''=A'' \, ,$$

relazioni tra le quali si può eliminare il rapporto $\frac{B'}{B}$ che è causa dell'indeterminazione, e con ciò si trova

$$(13) \qquad (A-A'')\,(A'-A'')=B''^2 \quad \text{con } A''\gtrless 0$$

per le genuine condizioni esprimenti che la superficie è di rotazione nell'ammessa ipotesi. Noi esigiamo che A'' sia diverso da zero, perchè A'' è in tal caso il valore della radice s', e questa non deve esser nulla acciò i piani diametrali (8) si trovino ad una distanza finita e determinata. Del resto le condizioni (13) avrebbonsi direttamente, risalendo all'equazioni (5) dove si farebbe $B=0$ e $B'=0$; ma conveniva far vedere che questo caso particolare era compreso nelle condizioni (9), le quali sotto la forma che qui l'abbiamo data non indurranno mai in errore, e ci faranno almeno avvertiti delle trasformazioni che esigono le diverse ipotesi particolari.

Nel caso in cui si avesse $B=B'=0$, o pure $B'=B''=0$, si troverebbero parimente le condizioni

$$(14) \qquad (A-A')\,(A''-A')=B'^2 \quad \text{con } A'\gtrless 0,$$

$$(15) \qquad (A'-A)\,(A''-A)=B^2 \quad \text{con } A\gtrless 0.$$

Quanto all'asse di rivoluzione rappresentato in generale dall'equazioni (11), l'ultimo membro dà sulle prime, per l'ipotesi $B=B'=0$,

$$z+\frac{C''}{A''}=0;$$

poscia i due primi membri, liberati dai fattori $\frac{B}{B'}$, $\frac{B'}{B}$, i cui valori son forniti dalle relazioni (12), condurranno a questa seconda equazione

$$y+\frac{C'}{A''}=\frac{A'-A''}{B''}\left(x+\frac{C}{A''}\right)=\frac{B''}{A-A''}\left(x+\frac{C}{A''}\right).$$

Simili risultamenti si avrebbero dalle ipotesi $B=B''=0$, o pure $B'=B''=0$.

257. Finalmente, se si supponga nel tempo stesso $B=B'=B''=0$, le condizioni (9) avvertiranno colla loro forma indeterminata la necessità di praticare in esse qualche trasformazione, e partendo dalle relazioni (13), (14), (15), alle quali abbiamo ridotte quelle condizioni quando erano nulli due soli rettangoli, si troverà che pel caso attuale le condizioni esprimenti che la superficie è di rivoluzione, e l'equazioni che ne determinano l'asse sono

$$A'=A''\gtrless 0,\quad A''y+C'=0,\quad A''z+C''=0,$$

o pure $$A=A''\gtrless 0,\quad Ax+C=0,\quad Az+C''=0,$$

o in fine $$A=A'\gtrless 0,\quad Ax+C=0,\quad Ay+C'=0.$$

Del resto, nell'ipotesi presente, la forma dell'equazione proposta rende assai facile la ricerca diretta di queste condizioni.

CAPITOLO XIII.

DEI PIANI TANGENTI DELLE SUPERFICIE DI SECONDO GRADO.



258. Se per un punto dato in una superficie di secondo grado si conducano quante *tangenti* si vogliano alla superficie, cioè, rette tali che il secondo punto di sezione colla superficie siasi riunito al primo, *tutte queste rette si troveranno in un solo e medesimo piano,* che chiamasi *piano tangente* della superficie in quel punto. Questa proposizione à bisogno di essere espressamente dimostrata, poichè non si

vede *a priori* la ragione per cui le dette tangenti non potrebbero formare un cono: siccome effettivamente avviene in alcuni punti singolari di certe superficie.

259. Per abbreviare i calcoli scriviamo le superficie di secondo grado sotto la forma seguente, che le comprende tutte:

$$(1)\quad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Cx+2C'y+2C''z+E=0.$$

Se x', y', z' dinotino le coordinate del punto dato sulla superficie, esse verificheranno la relazione

$$(2)\quad Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Cx'+2C'y'+2C''z'+E=0,$$

che introdotta nell'equazione della superficie, le farà prendere la forma

$$(3)\quad \begin{gathered} A(x^2-x'^2)+A'(y^2-y'^2)+A''(z^2-z'^2) \\ +2C(x-x')+2C'(y-y')+2C''(z-z')=0. \end{gathered}$$

Ciò posto, una secante qualunque menata pel punto in quistione, verrà espressa da

$$(4)\quad x-x'=m(z-z'),$$

$$(5)\quad y-y'=n'(z-z');$$

e per trovare i punti nei quali essa incontrerà la superficie bisognerà combinare l'equazioni (3), (4), (5), riguardandovi le variabili come aventi gli stessi valori. Se dunque in (3) si sostituiscano i valori di $x-x'$ ed $y-y'$, essa diverrà

$$(6)\quad (z-z')\left\{\begin{matrix} Am(x+x')+A'n(y+y')+A''(z+z') \\ +2Cm+2C'n+2C'' \end{matrix}\right\}=0,$$

equazione che in quanto ai punti comuni può rimpiazzare (3), e farà conoscere questi punti combinandola sempre con (4) e (5). Ora il primo fattore $z-z'$ eguagliato a zero conduce ad $x=x'$, $y=y'$, e si ha per tal modo il punto di partenza della secante. Il secondo punto di sezione verrebbe dunque determinato dal sistema (4), (5), e (7),

$$(7)\quad Am(x+x')+A'n(y+y')+A''(z+z')+2Cm+2C'n+2C''=0,$$

se si fosse fissata la direzione di questa secante assegnando de' valori ad m e ad n; ma siccome, per contrario, noi cerchiamo di determinare queste costanti in guisa che la retta sia tangente alla superficie, cioè a dire in modo che il secondo punto di sezione si riunisca al primo, così bisognerà esprimere che il sistema (4), (5), (7) è anche verificato dai valori $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$, ciò che stabilisce tra m ed n la relazione unica

$$(8)\quad Amx'+A'ny'+A''z'+Cm+C'n+C''=0,$$

per virtù della quale una delle costanti m ed n rimane arbitraria. Da ciò risulta che attribuendo ad m diversi valori successivi, e calcolando mediante l'equazione (8) i corrispondenti valori di n, si avrebbero colla loro sostituzione in (4) e (5) l'equazioni di una infinità di rette tangenti alla superficie nel punto dato; per conseguenza, si avrà *il luogo geometrico di tutte queste tangenti* eliminando m ed n tra (4), (5) e (8). Ora questa operazione dà per risultato

$$(9) \qquad (Ax'+C)(x-x')+(A'y'+C')(y-y') \\ +(A''z'+C'')(z-z')=0,$$

equazione che esprime evidentemente *un piano*, e che però ci permette affermare che *in ogni punto di una superficie di secondo grado esiste un piano tangente.*

260. Importa osservare che sviluppando l'equazione (9), ed avendo riguardo alla relazione (2), l'equazione del piano tangente si può mettere sotto la forma

$$(10) \qquad (Ax'+C)x+(A'y'+C')y+(A''z'+C'')z \\ +Cx'+C'y'+C''z'+E=0.$$

261. Per le superficie che ammettono un centro si può nell'equazione (1) supporre

$$C=0\ ,\ C'=0\ ,\ C''=0\ ,$$

e in questo caso l'equazione del piano tangente riducesi ad

$$(11) \qquad Ax'x+A'y'y+A''z'z+E=0.$$

Ora se si conduca un diametro al punto del contatto, questa retta verrà espressa da

$$x=\frac{x'}{z'}z=mz\ ,\ y=\frac{y'}{z'}z=nz\ ,$$

e il piano diametrale coniugato a questa medesima retta, il quale per la formola (3) del n° 105 è

$$Amx+A'ny+A'z=0\ ,$$

diverrà in questo caso

$$Ax'x+A'y'y+A''z'z=0.$$

È dunque chiaro che esso risulta parallelo al piano tangente (11) applicato all'estremità del diametro in quistione.

262. Proponghiamoci ora di trovare la *linea di contatto* di una superficie qualunque di secondo grado con un cono che le sarebbe circoscritto, e il cui vertice avrebbe per coordi-

nate α,β,γ: questa linea sarà il *contorno apparente* della superficie, veduta dal punto dato.

Per ciascun punto (x', y', z') di questa linea, il piano tangente alla superficie toccherà necessariamente il cono, e in conseguenza passerà pel vertice, talchè l'equazione (10) darà fra x', y', z', la relazione

$$(12)\qquad \left.\begin{matrix}(Ax'+C)\alpha+(A'y'+C')\beta+(A''z'+C')\gamma\\ +Cx'+C'y'+C''z'+E\end{matrix}\right\}=0;$$

ma siccome il punto di contatto che si considera è nella superficie, si avrà pure

$$(13)\qquad Ax'^2+A'y'^2+A''z'^2+2Cx'+2C'y'+2C''z'+E=0.$$

Pertanto la curva richiesta trovasi determinata col sistema dell'equazioni (12) e (13), cioè a dire che essa è l'intersezione della superficie proposta col piano espresso dall'equazione (12). Si può dunque conchiudere che in ***ogni superficie di secondo grado la curva di contatto di un cono circoscritto è sempre piana;*** e si può anche affermare che il suo piano è parallelo al piano diametrale, coniugato alla retta che unirebbe il vertice col centro della superficie, poichè questo centro à per coordinate

$$x_1=-\frac{C}{A},\; y_1=-\frac{C'}{A'},\; z_1=-\frac{C''}{A''}.$$

263. Se si volesse la *linea di contatto* della medesima superficie con un cilindro circoscritto e parallelo alla retta

$$x=mz\;,\; y=nz\,,$$

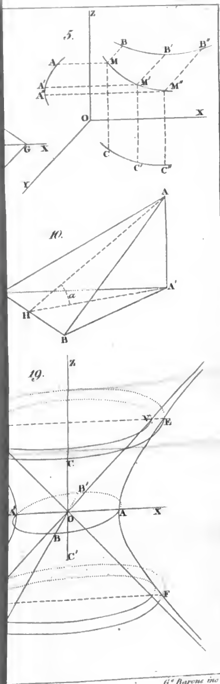
si esprimerebbe che per ciascun punto di questa linea il piano tangente (10) è *parallelo alla retta data*; ciò che darebbe (n° 45) tra le coordinate del punto di contatto la relazione

$$(14)\qquad (Ax'+C)m+(A'y'+C')n+(A''z'+C'')=0,$$

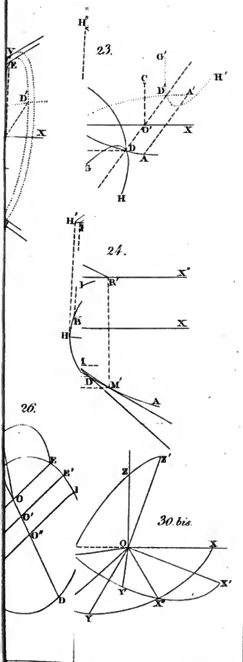
la quale unitamente all'equazione dalla superficie, cui le variabili x', y', z' debbono anche soddisfare, basterebbero a determinare la curva cercata. Ora dalla forma dell'equazione (14) si vede che *quest' altra linea di contatto è anche piana*, e che essa trovasi precisamente ***nel piano diametrale coniugato alle corde parallele ai lati del cilindro.***

FINE DELLA PRIMA PARTE.




5.
Z
B
B'
B''
A
M
A'
M'
A''
M''
O
X
G
X
C
C'
C''
Y
A
10.
A'
a
H
B
Z
19.
V
E
C
B'
A'
O
A
X
B
C'
F
G. Barone inc.





G.e Barone inc.



